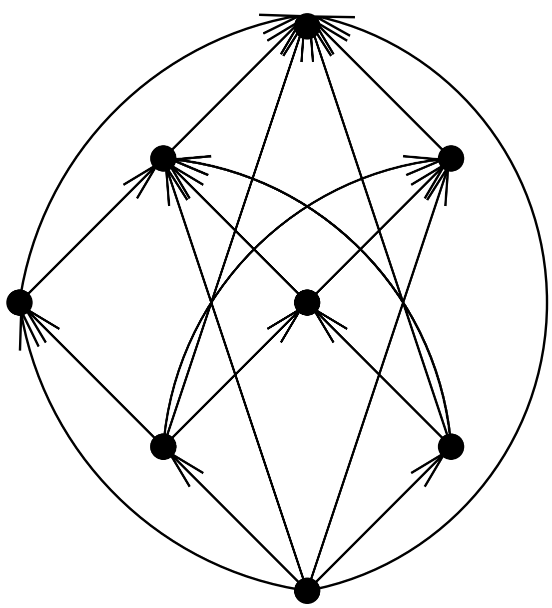
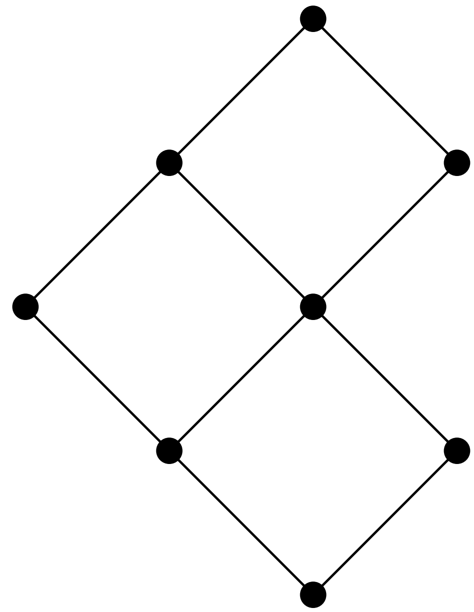
CARACTERIZACIÓN DE POSETS LIBRES DE $\mathbf{3+1}$

Marcos Skandera

(Massachusetts Institute of Technology)

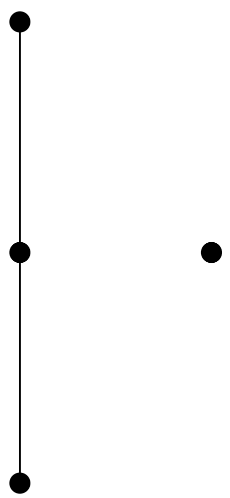
Índice



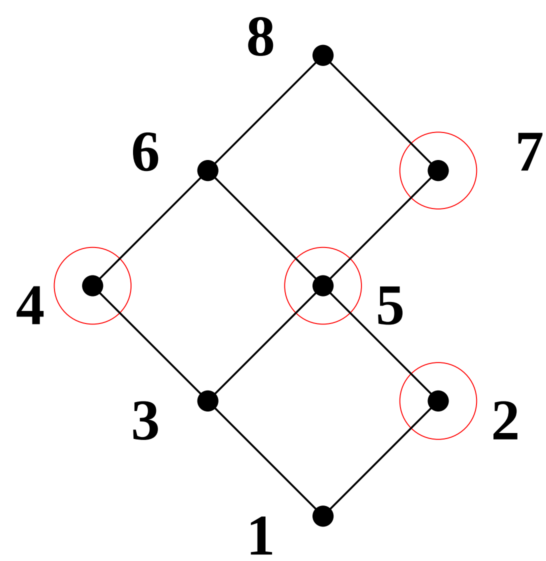


Definición. Un **conjunto parcialmente ordenado** o **"poset"** (del inglés "partially ordered set") es un grafo dirigido, transitivo, y sin ciclos. Si existe la arista dirigida (i, j), decimos que j **es mayor que** i, y escribimos $i <_P j$.

No se dibujan ni las flechas, ni las relaciones que son implicadas por transitividad.

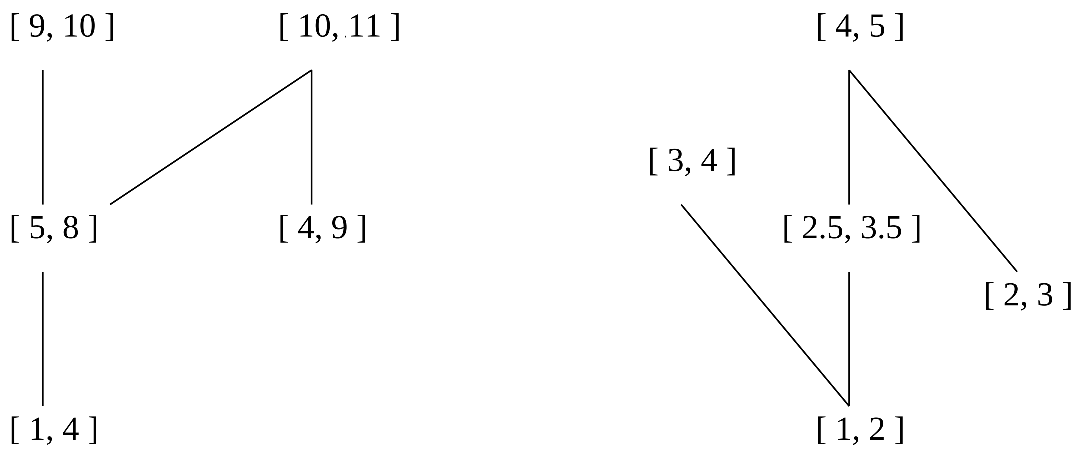


3 + 1



Un poset no libre de 3 + 1

Digamos que un poset es **libre de $\mathbf{a+b}$** si no contiene ningún subposet inducido que sea isomórfico a $\mathbf{a+b}$.

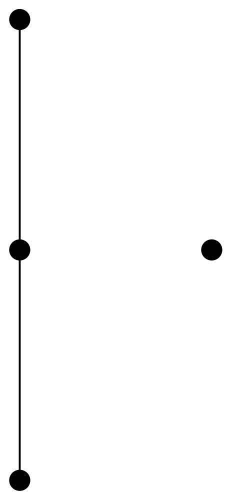


Un **orden de intervalos** es un conjunto de intervalos cerrados, con el orden parcial definido como

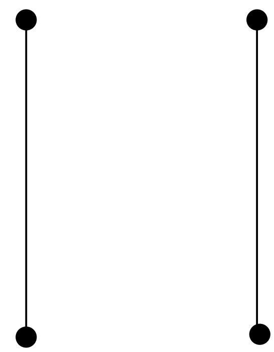
$$[a_i, b_i] < [a_j, b_j]$$

siempre que $b_i < a_j$.

En un **orden de intervalos de unidad,** todos los intervalos son del mismo tamaño.



3 + 1



2 + 2

Los **órdenes de intervalos** son exactamente los posets libres de $\mathbf{2}+\mathbf{2}$.

Los **órdenes de intervalos de unidad** son exactamente los poset libres de $\mathbf{2}+\mathbf{2}$ y $\mathbf{3}+\mathbf{1}$.

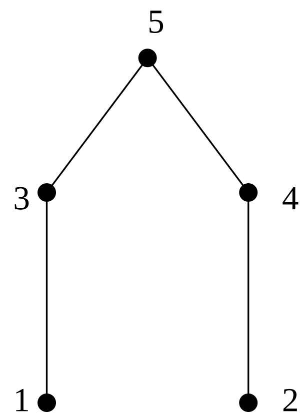
Posets Libres de $\mathbf{3+1}$

1. Se conjetura que la generalización del polinómio cromático de un grafo, $X_G(x)$, es **e-positivo** para los grafos de incomparabilidad de los posets libres de $\mathbf{3+1}$. (Stanley, Stembridge 1993)

2. Se sabe que $X_G(x)$ es **s-positivo** para los mismos grafos. (Gasharov 1996)

3. Se sabe que el **polinómio de cadenas** de un poset libre de $\mathbf{3+1}$ sólo tiene **ceros reales**. (Stanley 1995, Gasharov 1996)

¿ Cómo se puede caracterizar un poset libre de *sólo* $\mathbf{3+1}$?



Matrices Anti-adyacentes

Para un etiquetado de un poset P, definamos la **matriz anti-adyacente** $A = [a_{ij}]$ como

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i <_P j \\ 1 & \text{si no.} \end{cases}$$

Ejemplo.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Teorema. *Un poset P es libre de $\mathbf{3}+\mathbf{1}$ si y sólo si hay un etiquetado de sus elementos tal que la matriz anti-adyacente quadrada sea una submatriz de la matriz infinita de Toeplitz*

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 3 & 2 & 1 & 0 & \cdots \\ 4 & 3 & 2 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix},$$

con repetición de filas y columnas permitida.

Estas son las matrices de enteros no negativos que aumentan hacia el suroeste, en las cuales cada submatriz 2×2

$$\begin{bmatrix} b_{ik} & b_{i\ell} \\ b_{jk} & b_{j\ell} \end{bmatrix}$$

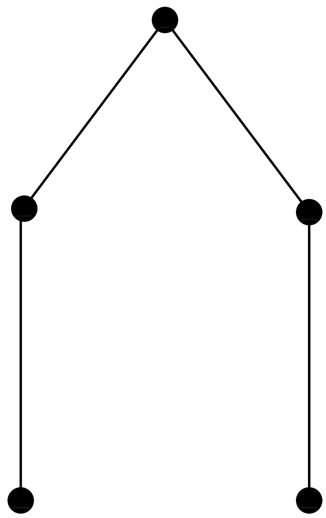
satisface

o (i) $b_{ik} - b_{i\ell} = b_{jk} - b_{j\ell}$

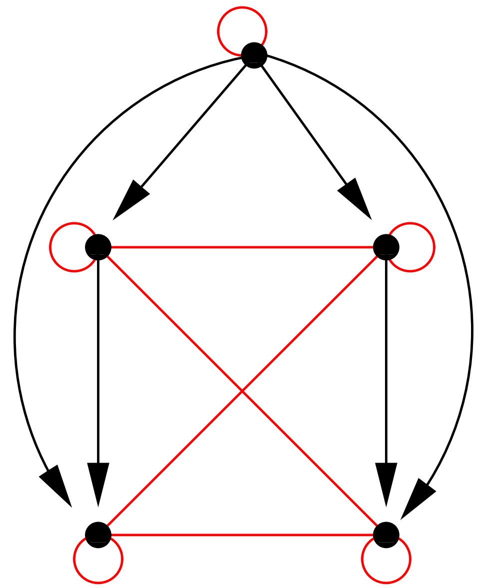
o (ii) $b_{i\ell} = 0$ y $b_{jk} - b_{j\ell} > b_{ik}$.

Ejemplo.

$$B = A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & 4 & 4 & 1 \end{bmatrix} .$$



P

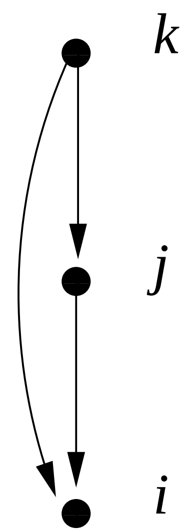


G

La Matriz Anti-adyacente Quadrada

Sea A la matriz **anti-adyacente** del poset P. Sea G el grafo cuyo matriz **adyacente** es A. (i, j) es una **arista dirigida** en G si $i >_P j$, y una **arista no dirigida** si i y j son incomparables o iguales.

La matriz $B = A^2$ calcula caminos de longitud 2 en G.



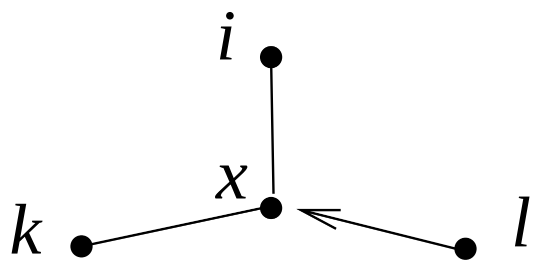
Sea P un poset libre de $\mathbf{3} + \mathbf{1}$.

Observación. Si existe en P una cadena de tres elementos $i <_P j <_P k$, entonces $b_{ik} = 0$.

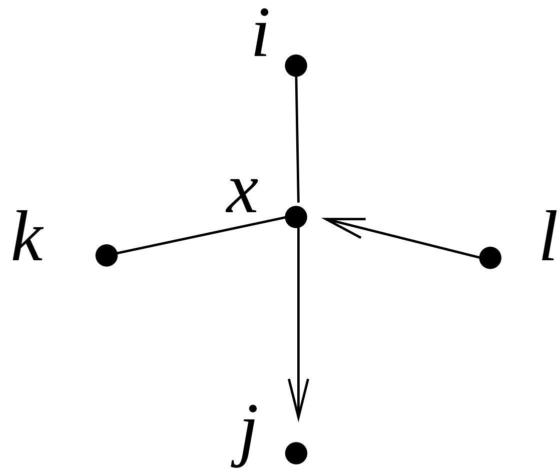
Demostración. Si $b_{ik} > 0$, entonces existe un elemento x, incomparable con i y con k.

Observación. Sean i, k, y ℓ elementos de P. Si $b_{ik} > b_{i\ell}$, entonces existe un elemento $x <_P \ell$, tal que $x \not<_P k$, y $x \not>_P i$.

Demostración. Si $b_{ik} > b_{i\ell}$, entonces G tiene más caminos de longitud dos desde i hasta k que desde i hasta ℓ. Entonces existe un vértice x tal que (i, x, k) **es un camino** en G y (i, x, ℓ) **no lo es**. En particular, la arista (ℓ, x) es dirigida.



Definición. Llamemos a un vértice como x arriba una **ventaja (k,ℓ)** para i. Imaginemos que x le ayuda a i a llegar a k, pero no a llegar a ℓ.



Lemma de la Ventaja

Sea P un poset libre de $\mathbf{3}+\mathbf{1}$.

Lemma. Si $b_{ik} - b_{i\ell} > b_{jk} - b_{j\ell}$, entonces o i tiene una ventaja (k, ℓ) que no la tiene j, o j tiene una ventaja (ℓ, k) que no la tiene i. En particular, uno de los siguientes es verdad:

1. Existe un elemento x tal que $j <_P x <_P \ell$, y $b_{j\ell} = 0$.
2. Existe un elemento y tal que $i <_P y <_P k$, y $b_{ik} = 0$.

Demostración.

$$
\begin{aligned}
b_{ik} - b_{i\ell} \quad &= \quad \#\{\text{ventajas } (k,\ell) \text{ para } i\} \\
&\quad - \#\{\text{ventajas } (\ell,k) \text{ para } i\}.
\end{aligned}
$$

Entonces, si $b_{ik} - b_{i\ell} > b_{jk} - b_{j\ell}$, tenemos

$$
\begin{aligned}
&\#\{\text{vtjs}(k,\ell) \text{ para } i\} + \#\{\text{vtjs}(\ell,k) \text{ para } j\} \\
> \quad &\#\{\text{vtjs}(k,\ell) \text{ para } j\} + \#\{\text{vtjs}(\ell,k) \text{ para } i\}.
\end{aligned}
$$

Si un elemento x es una ventaja (k,ℓ) para i, y no es una ventaja (k,ℓ) para j, entonces $j <_P x <_P \ell$. Según la primera observación, $b_{j\ell} = 0$.

Observación. Sea B **qualquier** matriz real. Las propriedades siguientes de B son equivalentes:

1. Es posible permutar las columnas y filas de B simultáneamente tal que B **aumente hacia el suroeste,** i.e.

$$\begin{bmatrix} b_{i,j} & \geq & b_{i+1,j} \\ |\wedge & & |\wedge \\ b_{i+1,j} & \geq & b_{i+1,j+1} \end{bmatrix},$$

2. Las **filas y columnas** de B correspondientes a la pareja de índices i y j **satisfacen** una de las siguentes parejas de **desigualdades de vectores**.

$$\text{fila}(i) \geq \text{fila}(j) \text{ y } \text{columna}(i) \leq \text{columna}(j)$$

$$\text{fila}(i) \leq \text{fila}(j) \text{ y } \text{columna}(i) \geq \text{columna}(j)$$

Proposición. Si P es un poset libre de $\mathbf{3}+\mathbf{1}$, entonces se pueden etiquetar los elementos de P de modo que la **matriz anti-adyacente quadrada** B **aumente** hacia el suroeste.

Demostración. Supongamos que B no aumenta hacia el suroeste.

Caso 1: Alguna pareja de columnas (o filas) **no es comparable** como pareja de vectores.

Entonces hay una submatriz 2×2

$$\begin{bmatrix} b_{ik} & > & b_{i\ell} \\ b_{jk} & < & b_{j\ell} \end{bmatrix},$$

y

$$b_{ik} - b_{i\ell} > 0 > b_{jk} - b_{j\ell}.$$

Aplicando el Lemma de la Ventaja a esta desigualdad, tenemos ó $b_{j\ell} = 0$, ó $b_{ik} = 0$, dos contradicciones.

Caso 2: Para alguna pareja i, j, tenemos la **pareja no correcta** de desigualdades

$$\text{fila}(i) \geq \text{fila}(j) \text{ y } \text{columna}(i) \geq \text{columna}(j).$$

Entonces para dos elementos k, ℓ de P,

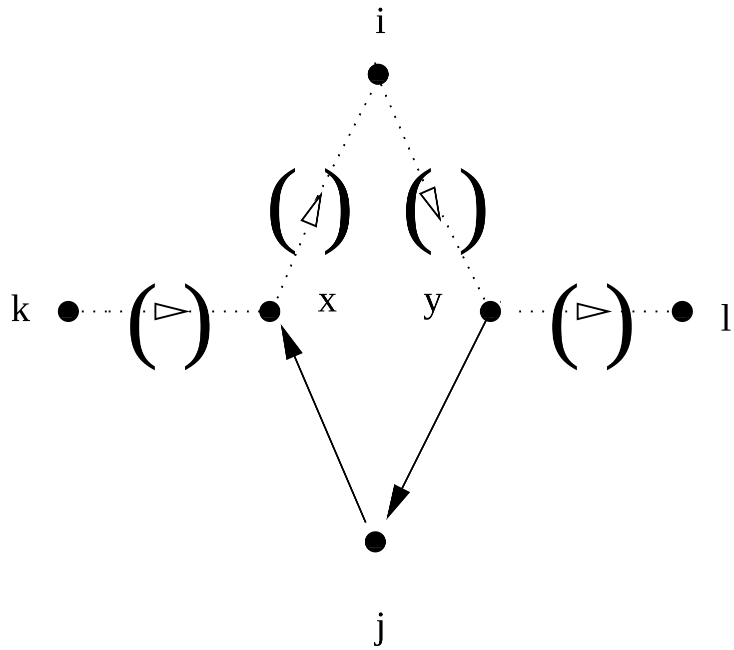
$$b_{ki} > b_{kj} \text{ y } b_{i\ell} > b_{j\ell}.$$

Entonces existe un elemento $x \neq j$ tal que

$$x <_P j,\ x \not<_P i, \text{ y } x \not>_P k,$$

y un elemento $y \neq j$ tal que

$$j <_P y,\ y \not>_P i, \text{ y } y \not<_P \ell.$$



Del grafo de arriba vemos que x e y tienen que ser incomparables con i, contradiciendo nuestra suposición que P sea libre de $\mathbf{3}+\mathbf{1}$.

Proposición. Sea P un poset libre de $\mathbf{3}+\mathbf{1}$, etiquetado tal que la matriz anti-adyacente quadrada, B, aumenta hacia el suroeste.

Entonces, cada submatriz 2×2

$$\begin{bmatrix} b_{ik} & b_{i\ell} \\ b_{jk} & b_{j\ell} \end{bmatrix}$$

satisface una de las condiciones siguientes:

1. $b_{ik} - b_{i\ell} = b_{jk} - b_{j\ell}$
2. $b_{i\ell} = 0$ y $b_{jk} - b_{j\ell} > b_{ik}$

$$\begin{bmatrix} b_{ik} & b_{i\ell} \\ b_{jk} & b_{j\ell} \end{bmatrix}$$

Demostración. Supongamos que no se satisface la condición (1), y apliquemos el Lemma de la Ventaja.

Caso 1: $(b_{ik} - b_{i\ell} > b_{jk} - b_{j\ell})$.

Si $b_{j\ell} = 0$, entonces

$$b_{i\ell} = 0 \text{ y } b_{ik} > b_{jk}. \quad (\Rightarrow\Leftarrow).$$

Si $b_{ik} = 0$, entonces

$$b_{i\ell} = 0 \text{ y } b_{j\ell} > b_{jk}. \quad (\Rightarrow\Leftarrow).$$

Caso 2: $(b_{ik} - b_{i\ell} < b_{jk} - b_{j\ell})$.

Si $b_{jk} = 0$, entonces

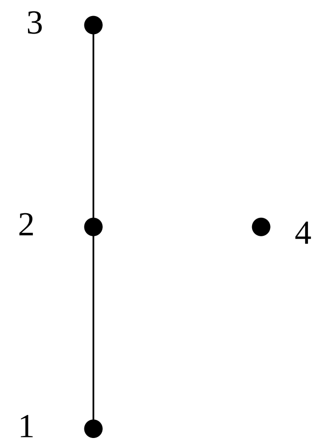
$$b_{ik} = b_{i\ell} = b_{j\ell} = 0. \quad (\Rightarrow\Leftarrow).$$

Concluimos: $b_{i\ell} = 0$, y $b_{jk} - b_{j\ell} > b_{ik}$.

Converso

Proposición. Si P **contiene** $\mathbf{3}+\mathbf{1}$ como un subposet inducido, entonces la matriz anti-adyacente quadrada **no es** una submatriz de la matriz inifinita de Toeplitz

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 3 & 2 & 1 & 0 & \cdots \\ 4 & 3 & 2 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}.$$



Demostración. Sea $Q = \mathbf{3} + \mathbf{1}$ y etiquemos a Q tal que

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

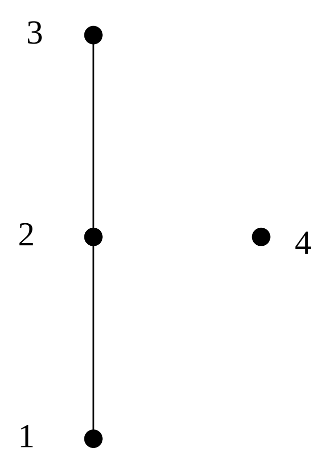
Entonces, $b_{11} - b_{13} < b_{31} - b_{33}$.

Para aumentar $b_{11} - b_{13}$ sin aumentar $b_{31} - b_{33}$, necesitamos que un elemento x sea una ventaja $(1, 3)$ para 1 y **no** sea una ventaja $(1, 3)$ para 3. Eso no es posible. Tampoco podemos disminuir la segunda diferencia sin disminuir la primera.

Definición. Definamos el **polinómio de cadenas** de un poset finito P como

$$f_P(x) = \sum_{i=0}^{r} c_i x^i,$$

donde c_i es el número de cadenas en P que tienen i elementos, y r es la longitud máxima de una cadena en P. Definamos $c_0 = 1$.



$$f_P(x) = 1 + 4x + 3x^2 + x^3.$$

Fórmula Para el Polinómio de Cadenas

Si A es la matriz anti-adyacente de P, entonces el polinómio de cadenas se puede expresar como

$$f_P(x) = \det(I + xA).$$

(Stanley, 1996). Vemos de esta fórmula que $f_P(x)$ tiene **ceros reales** si y sólo si A tiene **autovalores reales**.

Corolario. Sea P un poset libre de $\mathbf{3}+\mathbf{1}$. Entonces el polinómio de cadenas $f_P(x)$ sólo tiene ceros reales.

Demostración. $B = A^2$ es una submatriz de una matriz totalmente positiva. Entonces, B es totalmente positiva, y sólo tiene autovalores **reales no negativos.**

Entonces, A sólo tiene autovalores **reales**, y

$$f_P(x) = \det(I + xA)$$

sólo tiene ceros reales.

Conjetura: (Stanley-Neggers) Sea $J(Q)$ un **lattice distributivo**. Entonces el polinómio de cadenas $f_{J(Q)}(x)$ sólo tiene ceros reales.

La conjetura es verdad para el caso especial de **productos de cadenas.** (Simion, 1984)

Si la conjetura es verdad para **dos lattices distributivos**, también es verdad para **su producto**. (Wagner, 1990)

No se sabe si la conjetura es verdad para la clase más grande de **lattices modulares**.