

Interpretaciones del h -vector

Marcos Skandera
University of Michigan
Department of Mathematics

Resumen

A partir de la serie de Hilbert de un anillo graduado, es posible definir una sucesión de enteros denominada el h -vector. Por otra parte, utilizando los anillos de Stanley-Reisner, uno también puede asociar un h -vector a un complejo simplicial o a un conjunto parcialmente ordenado. En este trabajo damos una exposición de diferentes interpretaciones combinatorias del h -vector y mencionamos algunos problemas abiertos que motivan mucha investigación actual en el área de combinatoria algebraica.

1 Introducción

Una rama muy activa de investigación en combinatoria algebraica estudia sucesiones de enteros asociadas con complejos simpliciales. La naturaleza de los resultados que se obtienen varía mucho. Mientras unos matemáticos se dedican a mostrar desigualdades que describen las sucesiones que surgen en cada situación, otros buscan conexiones con la topología, el álgebra conmutativa o la enumeración. Un resultado enumerativo suele ser una *interpretación combinatoria* de una sucesión (a_0, \dots, a_d) , mostrando que cada número a_i es un entero positivo. Esto quiere decir que se define una sucesión de *conjuntos* (T_0, \dots, T_d) de modo que a_i sea la cardinalidad de T_i por $i = 0, \dots, d$.

Quizás las sucesiones que más parecen en tal investigación son las que se llaman *h -vectores*. Concentrándonos principalmente en los h -vectores positivos y basándonos en las publicaciones de Stanley ([30]-[39]), daremos una exposición de los h -vectores y algunas de sus interpretaciones combinatorias. Veremos los h -vectores desde los puntos de vista de anillos graduados, complejos simpliciales, conjuntos parcialmente ordenados y polinomios con raíces reales.

2 Anillos Graduados

Sea \mathbf{k} un cuerpo y sea A un cociente del anillo $\mathbf{k}[x_1, \dots, x_n]$ de polinomios en n variables de la forma

$$A = \mathbf{k}[x_1, \dots, x_n]/I,$$

donde $I = \langle p_1, \dots, p_\ell \rangle$ es el ideal generado por los elementos p_1, \dots, p_ℓ de $\mathbf{k}[x_1, \dots, x_n]$. Cuando cada elemento p_i es homogéneo, entonces el ideal I recibe el nombre de *ideal homogéneo* y se obtiene que el anillo A es *graduado*. Esto quiere decir que, como un espacio vectorial, A es isomorfo a la suma directa de los espacios A_0, A_1, \dots , donde A_m es el \mathbf{k} -espacio vectorial generado por los monomios de grado m en A ,

$$A \cong \bigoplus_{m \geq 0} A_m,$$

y la multiplicación en A satisface $A_i A_j \subset A_{i+j}$. Siempre daremos por supuesto que un anillo graduado es generado por los elementos de A_1 .

Sea \mathbb{N} el conjunto de los enteros no negativos. La función $H : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida como

$$\begin{aligned} H(m) &= \dim_{\mathbf{k}} A_m, \\ &= \text{número de monomios de grado } m \text{ en } A, \end{aligned}$$

recibe el nombre de *función de Hilbert* de A . La función generatriz de H es una serie formal de potencias,

$$F(t) = \sum_{m \geq 0} H(m)t^m \in \mathbb{N}[[t]],$$

que recibe el nombre de *serie de Hilbert* de A . Un resultado fundamental sobre la serie de Hilbert de un anillo graduado es el siguiente [3, Tm 11.1].

Teorema 2.1 (*Hilbert, Serre*) *Sea $A = \mathbf{k}[x_1, \dots, x_n]/I$ un anillo graduado. Entonces la serie de Hilbert de A tiene la forma*

$$F(t) = \frac{h(t)}{(1-t)^d},$$

donde $h(t) = h_0 + h_1 t + \dots + h_\ell t^\ell$ es un polinomio con coeficientes enteros que satisface $h(1) \neq 0$.

Si sabemos una expresión para $H(m)$, entonces podemos emplear el siguiente resultado concerniente a funciones racionales para calcular el entero ℓ en el Teorema 2.1. (Vea [36, Prop 4.2.2, Cor 4.3.1].)

Proposición 2.2 Si para algún entero $j \geq 0$, la sucesión $(H(m))_{m \geq j}$ se puede expresar como un polinomio en m , entonces el número ℓ en el Teorema 2.1 es menor que o igual a $(d + j - 1)$.

La sucesión (h_0, \dots, h_ℓ) de coeficientes de $h(t)$ en el numerador de la serie de Hilbert del anillo A recibe el nombre de h -vector de A . El polinomio correspondiente recibe el nombre de h -polinomio de A . En general, el h -vector no tiene porque tener una *interpretación combinatoria*. Por supuesto, cuando hay números negativos en la sucesión, no podemos definir ninguna sucesión de conjuntos (T_0, \dots, T_ℓ) de modo que h_i sea la cardinalidad de T_i por $i = 0, \dots, \ell$. Ya veremos que hay una clase de anillos cuyos h -vectores tienen componentes positivas. Más aún, estos h -vectores tienen una interpretación combinatoria.

El entero d que parece en el denominador del serie de Hilbert de un anillo graduado es mayor que o igual a cero, y se llama la *dimensión de Krull* de A o simplemente la *dimensión* de A . Se escribe $\dim A$ y tiene las dos siguientes (equivalentes) interpretaciones:

1. El número máximo de elementos homogéneos de A que son algebraicamente independientes.
2. El máximo de las longitudes de cadenas de ideales primos en A .

Ejemplo 2.1 Sea $A = \mathbf{k}[x_1, \dots, x_4]/\langle x_2x_3 \rangle$. La función de Hilbert de A es

$$\begin{aligned} H(m) &= \binom{4}{m} - \binom{4}{m-2} \\ &= \binom{m+3}{m} - \binom{m+1}{m-2} \\ &= (m+1)^2, \text{ si } m \geq 0. \end{aligned}$$

Para calcular la dimensión, notamos que $\dim A$ es mayor que o igual a tres, porque los elementos x_1, x_2 y x_3 son algebraicamente independientes. De hecho $\dim A$ tiene que ser tres exactamente porque no hay cuatro monomios que sean independientes. (Si usamos las dos variables x_2 y x_3 , entonces habrá dependencia. Si usamos solo tres variables de los cuatro, habrá un máximo de tres monomios independientes.) Para calcular la serie de Hilbert empleamos el Teorema 2.1 y la Proposición 2.2 para calcular el polinomio $h(t) = h_0 + h_1t + h_2t^2$ que satisface

$$(1-t)^3 \sum_{m \geq 0} (m+1)^2 t^m = h_0 + h_1t + h_2t^2.$$

Comparando los coeficientes de cada potencia de t en ambos lados, vemos que

$$\begin{aligned} h_0 &= h_1 = 1, \\ h_2 &= 0. \end{aligned}$$

Entonces la serie de Hilbert de A es

$$F(t) = \sum_{m \geq 0} (m+1)^2 t^m = \frac{1+t}{(1-t)^3}.$$

Ejercicio 2.2 Calcule la función de Hilbert, la dimensión y la serie de Hilbert del anillo $B = \mathbf{k}[x_1, \dots, x_4]/\langle x_1x_4, x_2x_4, x_3x_4 \rangle$.

Aparte de la dimensión de Krull, otro número importante que asociamos con un anillo es la *profundidad*. Una sucesión (p_1, \dots, p_r) de elementos homogéneos de A recibe el nombre de *sucesión regular* [35, p 35] si

1. $\dim A/\langle p_1, \dots, p_r \rangle = \dim A - r$.
2. Ningún elemento p_i , $1 \leq i \leq r$, es un divisor de cero en $A/\langle p_1, \dots, p_{i-1} \rangle$.

La longitud máxima de una sucesión regular de A recibe el nombre de *profundidad* de A . En principio, calcular profundidad parece difícil. Aún dado una sucesión regular, ¿cómo se sabe que no hay otra más larga? La respuesta es sencilla [35, p 35].

Teorema 2.3 *Todas la sucesiones regulares maximales tienen la misma longitud.*

Esto quiere decir que si no podemos agregar otro elemento a una sucesión regular, entonces no hay ninguna otra sucesión regular con mayor longitud.

Evidentemente la longitud r de una sucesión regular siempre es menor que o igual a la dimensión. Un anillo A cuya dimensión es *igual* a su profundidad tiene mucha importancia en el álgebra conmutativa y recibe el nombre de *anillo de Cohen-Macaulay*. (Vea [8].) Una caracterización de los anillos de Cohen-Macaulay en términos de sucesiones regulares es el siguiente [35, Tm 5.9]:

Teorema 2.4 *El anillo A es un anillo de Cohen-Macaulay con $\dim A = d$ si y sólo si cada sucesión (p_1, \dots, p_d) que satisface $\dim A/\langle p_1, \dots, p_d \rangle = 0$ es regular.*

Una propiedad interesante de un anillo de Cohen-Macaulay A es la relación entre la serie de Hilbert de A y la de $A/\langle p_1, \dots, p_d \rangle$, cuando (p_1, \dots, p_d) es una sucesión regular [35, p 35].

Teorema 2.5 *Sea A un anillo de Cohen-Macaulay de dimensión d y con serie de Hilbert $F(t)$. Sea (p_1, \dots, p_d) una sucesión regular para A y sea $\tilde{F}(t)$ la serie de Hilbert del cociente $A/\langle p_1, \dots, p_d \rangle$. Entonces tenemos que*

$$F(t) = \frac{\tilde{F}(t)}{(1-t)^d}.$$

El Teorema 2.5 nos da una interpretación combinatoria del h -vector de un anillo de Cohen-Macaulay.

Corolario 2.6 *Sea A un anillo de Cohen-Macaulay con h -vector (h_0, \dots, h_ℓ) y sea (p_1, \dots, p_d) una sucesión regular para A . Entonces h_i es el número de monomios de grado i en el anillo $R = A/\langle p_1, \dots, p_d \rangle$ y $h(t) = h_0 + h_1 t + \dots + h_\ell t^\ell$ es la serie de Hilbert de R . En particular tenemos que*

$$\begin{aligned} h_0 &= 1, \\ h_i &> 0, \quad i = 1, \dots, \ell. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.3 Sea A el anillo del Ejemplo 2.1, que tiene dimensión tres. Veremos que A es un anillo de Cohen-Macaulay, exhibiendo una sucesión regular de tres elementos. Consideremos la sucesión $(x_1, x_2 + x_3, x_4)$. El cociente de A correspondiente a esta sucesión tiene dimensión cero porque tenemos el isomorfismo

$$A/\langle x_1, x_2 + x_3, x_4 \rangle \cong \mathbf{k}[x_2]/\langle x_2^2 \rangle. \quad (1)$$

También, vemos que x_1 no es un divisor de cero en A , ni $x_2 + x_3$ en $A/\langle x_1 \rangle$, ni x_4 en $A/\langle x_1, x_2 + x_3 \rangle$. Entonces la sucesión $(x_1, x_2 + x_3, x_4)$ es regular, la profundidad de A es tres, y A es un anillo de Cohen-Macaulay. Podemos ver directamente de la ecuación (1) que la función de Hilbert de $A/\langle x_1, x_2 + x_3, x_4 \rangle$ es $(1 + t)$, o bien podemos aplicar el Teorema 2.5 al resultado del Ejemplo 2.1.

Ejercicio 2.4 Sea B el anillo del Ejercicio 2.2. Muestre que $(x_1 + x_4)$ es una sucesión regular y que no hay ninguna de longitud dos. Entonces B no es un anillo de Cohen-Macaulay.

3 Complejos Simpliciales

Los complejos simpliciales son objeto de estudio en diversas áreas de matemáticas. A cada complejo simplicial le podemos asociar un anillo que es relevante en el álgebra conmutativa. Más aún, tanto el h -vector de este anillo como otra sucesión que se llama el f -vector del complejo tienen importancia en la combinatoria enumerativa.

Sea $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ un conjunto finito. Un *complejo simplicial* (abstracto) en V es una colección Δ de subconjuntos de V tal que

1. Si G pertenece a Δ y F está contenido en G , entonces F pertenece a Δ .
2. Cada subconjunto de un solo elemento $\{v_i\}$ pertenece a Δ .

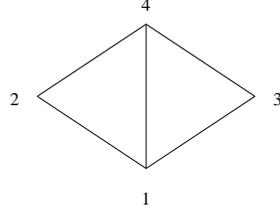


Figura 3.1: un complejo simplicial

Los subconjuntos de Δ reciben el nombre de *caras*. Una cara de cardinalidad uno recibe el nombre de *vértice* y una cara de cardinalidad máxima recibe el nombre de *faceta*. Note que la cara vacía pertenece a Δ a menos que Δ sea el complejo vacío. Definimos la *dimensión* de una cara F de Δ como

$$\dim F = |F| - 1,$$

por razones topológicas. Definimos la *dimensión* de Δ como

$$\dim \Delta = \max\{\dim F \mid F \in \Delta\}.$$

Decimos que un complejo es *puro* si todas las caras maximales tienen la misma cardinalidad.

Dado un complejo Δ de dimensión $d - 1$, definimos el *f-vector* de Δ como

$$f_{\Delta} = (f_{-1}, f_0, \dots, f_{d-1}),$$

donde f_i es el número de caras con $i + 1$ vértices,

$$f_i = \#\{F \in \Delta \mid \dim F = i\}.$$

(Entonces, $f_{-1} = 1$ siempre que Δ no sea vacío.) Definimos el *f-polinomio* de Δ como

$$f_{\Delta}(t) = f_{-1} + f_0 t + \dots + f_{d-1} t^d.$$

Ejemplo 3.1 Sea Δ el complejo en cuatro vértices $\{1, 2, 3, 4\}$ que consiste en todos los subconjuntos de $\{1, 2, 4\}$ y $\{1, 3, 4\}$. (Vea la Figura 3.1.) Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} f_{\Delta} &= (1, 4, 5, 2), \\ f_{\Delta}(t) &= 1 + 4t + 5t^2 + 2t^3, \\ \dim(\Delta) &= 2. \end{aligned}$$

Ejercicio 3.2 Sea Γ el complejo en cuatro vértices $\{1, 2, 3, 4\}$ que consiste en $\{3\}$ y en todos los subconjuntos de $\{1, 2, 4\}$. Dibuje Γ y calcule el f -vector, el f -polinomio y la dimensión.

No es cierto que cualquier sucesión de enteros positivos es el f -vector de un complejo simplicial. Una caracterización de los f -vectores de complejos simpliciales fue descubierta por Schützenberger e independientemente por Kruskal y Katona. (Vea [19, Sec 8] y [35, p 54].) Para dar esta caracterización, emplearemos la notación de [4]. Si k y n son enteros positivos, entonces hay una única manera de expresar n como

$$n = \binom{a_k}{k} + \binom{a_{k-1}}{k-1} + \cdots + \binom{a_i}{i} \quad (2)$$

tal que $a_k > a_{k-1} > \cdots > a_i \geq i \geq 1$. Entonces definimos

$$\partial_k(n) = \binom{a_k}{k-1} + \binom{a_{k-1}}{k-2} + \cdots + \binom{a_i}{i-1},$$

si $n > 0$ y definimos $\partial_k(0) = 0$.

Teorema 3.1 Una sucesión $(1, f_0, \dots, f_{d-1})$ de enteros positivos es el f -vector de un complejo simplicial de dimensión $d-1$ si y sólo si

$$f_{i-1} \geq \partial_{i+1}(f_i), \quad i = 1, \dots, d-1.$$

Por otra formulación de este teorema, vea [35, p 55].

Ahora cambiaremos el punto de vista un poco y veremos el complejo simplicial de una manera más algebraica y menos geométrica. Sea Δ un complejo simplicial en un conjunto de n variables $V = \{x_1, \dots, x_n\}$. Entonces las caras de Δ se pueden ver como monomios. Definimos el *anillo de caras* (o *anillo de Stanley y Reisner*) de Δ , escrito $\mathbf{k}[\Delta]$, como

$$\mathbf{k}[\Delta] = \mathbf{k}[x_1, \dots, x_n]/I_\Delta,$$

donde I_Δ es el ideal generado por monomios que no sean caras de Δ . Note que para generar I_Δ , siempre es suficiente usar sólo los monomios *minimales* que no sean caras de Δ .

Ejemplo 3.3 Sea Δ el complejo del Ejemplo 3.1. El anillo de caras $\mathbf{k}[\Delta]$ es

$$\mathbf{k}[x_1, \dots, x_4]/\langle x_2x_3 \rangle.$$

Cada elemento de $\mathbf{k}[\Delta]$ es una combinación lineal de monomios de $\mathbf{k}[\Delta]$ que corresponden, luego de tomar su soporte, a caras de Δ . Por ejemplo, el polinomio $x_1^3x_2x_4^5 + x_1x_4^2$ está en $\mathbf{k}[\Delta]$. El soporte de un monomio se obtiene haciendo que todas las potencias positivas sean iguales a uno. Entonces el soporte de $x_1^3x_2x_4^5$ es la faceta $x_1x_2x_4$ y el soporte de $x_1x_4^2$ es la cara x_1x_4 .

Ejercicio 3.4 Sea Γ el complejo del Ejercicio 3.2. Escriba una expresión para el anillo de caras $\mathbf{k}[\Gamma]$.

Como el ideal I_Δ es homogéneo, el anillo $\mathbf{k}[\Delta]$ es graduado. La función de Hilbert y la serie de Hilbert del anillo de caras se pueden calcular fácilmente usando el f -vector del complejo [35, Tm 1.4].

Teorema 3.2 Sea Δ un complejo con f -vector $f_\Delta = (f_{-1}, f_0, \dots, f_{d-1})$. Entonces la serie de Hilbert y la función de Hilbert de Δ son las siguientes.

$$F(t) = \sum_{i=-1}^{d-1} f_i \frac{t^{i+1}}{(1-t)^{i+1}} = f_\Delta\left(\frac{t}{1-t}\right).$$

$$H(m) = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 0, \\ \sum_{i=0}^{d-1} f_i \binom{m-1}{i} & \text{si no.} \end{cases}$$

Demostración: Sea $x_{i_1} \cdots x_{i_k}$ una cara de Δ . La suma de los monomios que tienen la forma $x_{i_1}^{a_1} \cdots x_{i_k}^{a_k}$, donde cada exponente es mayor que cero, es

$$\left(\frac{x_{i_1}}{1-x_{i_1}}\right) \cdots \left(\frac{x_{i_k}}{1-x_{i_k}}\right).$$

Por otra parte podemos elegir una cara de dimensión $k-1$ de f_{k-1} maneras diferentes. Reemplazando cada variable x_i por t , llegamos a la expresión por la serie de Hilbert. La expresión para la función de Hilbert sigue de aquí. \square

Según el Teorema 2.1, también tenemos la fórmula

$$f_\Delta\left(\frac{t}{1-t}\right) = \frac{h_0 + h_1 t + \cdots + h_\ell t^\ell}{(1-t)^d}, \quad (3)$$

donde la dimensión d de $\mathbf{k}[\Delta]$ se puede ver directamente del complejo.

Teorema 3.3 $\dim \mathbf{k}[\Delta] = \dim \Delta + 1$.

Demostración: El máximo de la cardinalidad de los conjuntos de elementos algebraicamente independientes de $\mathbf{k}[\Delta]$ es el máximo de la cardinalidad de las caras. \square

El polinomio $h_{\mathbf{k}[\Delta]}(t)$ que aparece en la ecuación (3) recibe el nombre de h -polinomio del complejo Δ y se escribe simplemente $h_\Delta(t)$. Naturalmente la sucesión

$$h_{\mathbf{k}[\Delta]} = (h_0, \dots, h_\ell)$$

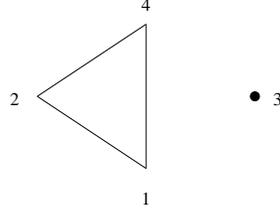


Figura 3.2: un complejo simplicial

recibe el nombre de h -vector del complejo y se escribe h_Δ . El h -vector h_Δ se puede calcular directamente del f -vector f_Δ usando la ecuación (3),

$$h_\Delta(t) = (1-t)^d f_\Delta\left(\frac{t}{1-t}\right). \quad (4)$$

Note que la ecuación (4) nos da un algoritmo por calcular el h -polinomio.

1. Invertimos el orden de los coeficientes del f -polinomio:

$$f_\Delta(t) \mapsto t^d f_\Delta\left(\frac{1}{t}\right).$$

2. Reemplazamos t por $t-1$:

$$t^d f_\Delta\left(\frac{1}{t}\right) \mapsto (t-1)^d f_\Delta\left(\frac{1}{t-1}\right).$$

3. Invertimos el orden de los coeficientes de nuevo:

$$\begin{aligned} (t-1)^d f_\Delta\left(\frac{1}{t-1}\right) &\mapsto t^d \left(\frac{1}{t}-1\right)^d f_\Delta\left(\frac{1}{\frac{1}{t}-1}\right) \\ &= (1-t)^d f_\Delta\left(\frac{t}{1-t}\right) \\ &= h_\Delta(t). \end{aligned}$$

Ejemplo 3.5 Sea Γ el complejo simplicial de la Figura 3.2. Usando el algoritmo previamente descrito para calcular el h -polinomio del f -polinomio, tenemos que $h_\Gamma(t) = 1 + t - 2t^2 + t^3$ porque

$$\begin{aligned} f_\Gamma(t) &= 1 + 4t + 3t^2 + t^3 \\ &\mapsto 1 + 3t + 4t^2 + t^3 \\ &\mapsto 1 + 3(t-1) + 4(t-1)^2 + (t-1)^3 \\ &= 1 - 2t + t^2 + t^3 \\ &\mapsto 1 + t - 2t^2 + t^3. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.6 Sea Δ el complejo de todos los subconjuntos de un conjunto de n vértices. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} f_{\Delta} &= (1, n, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{2}, n, 1), \\ f_{\Delta}(t) &= (1+t)^n. \end{aligned}$$

Calculando $h_{\Delta}(t)$, tenemos que

$$(1+t)^n \mapsto (1+t)^n \mapsto t^n \mapsto 1.$$

Entonces, $h_{\Delta}(t) = 1$.

De la fórmula (4) vemos que un producto de f -polinomios corresponde a un producto de h -polinomios.

Proposición 3.4 Sean Δ , Γ y Σ tres complejos tales que sus f -vectores están relacionados por la ecuación $f_{\Delta}(t) = f_{\Gamma}(t)f_{\Sigma}(t)$. Entonces tenemos que

$$h_{\Delta}(t) = h_{\Gamma}(t)h_{\Sigma}(t).$$

La Proposición 3.4 se puede emplear para calcular el f -vector y el h -vector de un cono. Sea Γ un complejo en los n vértices x_1, \dots, x_n y definimos el *cono sobre Γ* como el complejo en los $n+1$ vértices x_1, \dots, x_{n+1} cuyas caras son todas las caras de Γ , más todos los conjuntos de la forma

$$F \cup \{x_{n+1}\}, \quad F \in \Gamma.$$

Si Δ es el cono sobre Γ , entonces tenemos que

$$f_{\Delta}(t) = (1+t)f_{\Gamma}(t),$$

y los h -polinomios son iguales,

$$h_{\Delta}(t) = h_{\Gamma}(t).$$

El algoritmo que viene de la ecuación (4) también se puede expresar como la identidad

$$\sum_{i=0}^d h_i t^{d-i} = \sum_{i=0}^d f_{i-1} (t-1)^{d-i}, \quad (5)$$

porque

$$f_{\Delta}(t) = \sum_{i=0}^d f_{i-1} t^d \mapsto \sum_{i=0}^d f_{i-1} t^{d-i} \mapsto \sum_{i=0}^d f_{i-1} (t-1)^{d-i},$$

que es el h -polinomio $h_{\Delta}(t)$ con los coeficientes invertidos.

Ejercicio 3.7 Usando el Ejemplo 3.6 y la ecuación (5), simplifique la expresión

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (t-1)^{n-i}.$$

Usando la identidad (5), no es difícil escribir fórmulas por el h -vector en términos del f -vector y viceversa,

$$h_i = \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{d-j}{i-j} f_{j-1},$$

$$f_{i-1} = \sum_{j=0}^i \binom{d-j}{i-j} h_j.$$

Dos casos especiales de estas fórmulas son

$$h_d = (-1)^d f(-1), \tag{6}$$

$$f_{d-1} = h_0 + \cdots + h_d. \tag{7}$$

En particular, vemos de la ecuación (6) que la característica reducida de Euler, que se define como

$$\tilde{\chi}(\Delta) = -1 + f_0 - f_1 + \cdots \pm f_{d-1},$$

y que satisface

$$\tilde{\chi}(\Delta) = \sum_{i=0}^d (-1)^{i-1} \dim_{\mathbf{k}} \tilde{H}_{i-1}(\Delta; \mathbf{k}),$$

también se puede expresar como $(-1)^{d-1} h_d$.

Aunque ahora tenemos varias fórmulas para el h -vector de un complejo, todavía no tenemos ninguna interpretación combinatoria para esta sucesión. De hecho el h -vector de un complejo no es siempre positivo. (Vea el Ejemplo 3.5.) En la próxima sección veremos una clase de complejos cuyos h -vectores siempre son positivos. Veremos también varias interpretaciones combinatorias.

4 Complejos de Cohen-Macaulay, Multicomplejos y Complejos Particionables

Un complejo Δ recibe el nombre de *complejo de Cohen-Macaulay* (sobre \mathbf{k}) si el anillo $\mathbf{k}[\Delta]$ es un anillo de Cohen-Macaulay. Muchos complejos importantes son complejos de Cohen-Macaulay:

1. los complejos que tienen una realización geométrica homeomorfa a una esfera.
2. los complejos “shellables”.
3. los complejos matroidales.
4. los retículos semimodulares, que incluyen los retículos modulares, geométricos y distributivos.

Aunque los retículos no sean complejos exactamente, ya veremos en la Sección 5 que se pueden ver como casos especiales de complejos.

Entre las propiedades de los complejos de Cohen-Macaulay, estudiaremos su relación con la teoría de homología, con otros objetos denominados *multicomplejos*. También daremos varias interpretaciones combinatorias de sus h -vectores.

Se puede dar una caracterización de los complejos de Cohen-Macaulay utilizando homología reducida. Sea F una cara del complejo Δ . Definimos el subcomplejo $\text{lk } F$ (en inglés, *the link of F*) como

$$\text{lk } F = \{G \in \Delta \mid G \cup F \in \Delta, G \cap F = \emptyset\}.$$

(Vea por ejemplo la Figura 3.1. En ese complejo, las caras de $\text{lk } \{1\}$ son \emptyset , $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{2, 3\}$ y $\{3, 4\}$.)

Reisner [24] encontró la siguiente caracterización.

Teorema 4.1 *El complejo Δ es un complejo de Cohen-Macaulay sobre \mathbf{k} si y sólo si tenemos que*

$$\tilde{H}_i(\text{lk } F; \mathbf{k}) = 0,$$

por todas las caras $F \in \Delta$ y todos los enteros $i = 0, \dots, \dim(\text{lk } F) - 1$.

Usando este teorema, se puede mostrar que ser un complejo de Cohen-Macaulay es una propiedad topológica. (Vea [35, p 60-61].) Esto significa que si dos complejos son homeomorfos uno al otro, y uno es un complejo de Cohen-Macaulay, entonces el otro también es un complejo de Cohen-Macaulay.

Volviendo de la topología al álgebra, daremos dos nuevas interpretaciones combinatorias del h -vector. Note que ya tenemos una interpretación del h -vector de un complejo de Cohen-Macaulay: es la función de Hilbert de un anillo de grado cero. (Vea el Corolario 2.6.) Ahora daremos otra interpretación en términos de los *multicomplejos*. Un multicomplejo en un conjunto de n variables $\{x_1, \dots, x_n\}$ es un conjunto Γ de monomios en las variables tal que

1. Si u pertenece a Γ y v divide u , entonces v pertenece a Γ .
2. Cada variable x_i pertenece a Γ .

Note que el monomio 1 pertenece a Γ , a menos que Γ sea el multicomplejo vacío.

Ya hemos visto un ejemplo de un multicomplejo finito: el complejo simplicial. También existen multicomplejos infinitos.

Ejemplo 4.1 Sea Δ un complejo simplicial. Entonces el conjunto de monomios en $\mathbf{k}[\Delta]$ es un multicomplejo infinito.

Dado un multicomplejo Γ , definimos el f -vector y f -polinomio (f -serie) de Γ como

$$f_{\Gamma} = (f_{-1}, f_0, \dots),$$

$$f_{\Gamma}(t) = f_{-1} + f_0 t + \dots + f_{i-1} t^i + \dots,$$

donde f_{i-1} es el número de monomios en Γ de grado i . (Tenemos que $f_{-1} = 1$ siempre que Γ no sea vacío.) No definimos un h -vector de un multicomplejo, a menos que sea un complejo simplicial.

La caracterización de los f -vectores de multicomplejos es parecida a la caracterización de los f -vectores de complejos simpliciales, y fue descubierta por Macaulay [22]. Dado dos enteros positivos k y n , expresamos n como (2) y definimos

$$\partial^k(n) = \binom{a_k - 1}{k - 1} + \binom{a_{k-1} - 1}{k - 2} + \dots + \binom{a_i - 1}{i - 1},$$

si $n > 0$ y definimos $\partial^k(0) = 0$.

Teorema 4.2 Una sucesión $(1, f_0, f_1, \dots)$ de enteros positivos es el f -vector de un multicomplejo si y sólo si

$$f_{i-1} \geq \partial^{i+1}(f_i), \quad i \geq 1.$$

Por otra formulación de este teorema, vea [35, p 56].

Un resultado interesante que da la conexión entre multicomplejos y anillos graduados es el siguiente [22].

Teorema 4.3 Sea $H : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una función. H es la función de Hilbert de un anillo graduado si y sólo si la sucesión $(H(0), H(1), \dots)$ es el f -vector de un multicomplejo.

Más interesante todavía es la conexión que existe entre multicomplejos, complejos de Cohen-Macaulay y anillos graduados. (Vea [35, pp 57-59].)

Teorema 4.4 Sea h la sucesión $(h_0, \dots, h_{\ell}) \in \mathbb{N}^{\ell+1}$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. h es el f -vector de un multicomplejo finito.
2. h es la función de Hilbert de un anillo graduado de dimensión cero.
3. h es el h -vector de un anillo de Cohen-Macaulay.
4. h es el h -vector de un complejo de Cohen-Macaulay.

Una tercera interpretación del h -vector no depende del hecho que el complejo sea de Cohen-Macaulay. Sea Δ un complejo simplicial y sean F y H dos caras tal que H contiene F . Definimos el *intervalo* $[F, H]$ como

$$[F, H] = \{G \in \Delta \mid F \subset G \subset H\}.$$

Un complejo Δ recibe el nombre de *complejo particionable* si es puro y si se puede particionar en bloques que son intervalos disjuntos,

$$\Delta = [F_1, H_1] \cup \cdots \cup [F_s, H_s],$$

de modo que las caras H_1, \dots, H_s sean facetas de Δ . El h -vector de un complejo particionable tiene la siguiente interpretación combinatoria [35, Prop 2.3].

Teorema 4.5 *Sea Δ un complejo particionable con h -vector $h_\Delta = (h_0, \dots, h_d)$ y sea*

$$\Delta = [F_1, H_1] \cup \cdots \cup [F_s, H_s]$$

una partición de Δ . Entonces h_i es el número de bloques en la partición tal que la cara menor tiene i elementos,

$$h_i = \#\{j : |F_j| = i\}.$$

Equivalentemente tenemos que

$$\sum_{i=0}^d h_i t^i = \sum_{j=1}^s t^{|F_j|}. \quad (8)$$

Demostración: Sea $(f_{-1}, f_0, \dots, f_{d-1})$ el f -vector de Δ . Usando la identidad (5), tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^d h_i t^{d-i} &= \sum_{i=0}^d f_{i-1} (t-1)^{d-i}, \\ &= \sum_{j=1}^s \sum_{G \in [F_j, H_j]} (t-1)^{d-|G|}. \end{aligned}$$

Cuando la cardinalidad de F_j es ℓ tenemos que

$$\sum_{G \in [F_j, H_j]} (t-1)^{d-|G|} = \sum_{k=0}^{d-\ell} \binom{d-\ell}{k} (t-1)^{d-\ell-k},$$

porque el complejo Δ es puro. Usando la identidad del Ejercicio 3.7, tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{d-\ell} \binom{d-\ell}{k} (t-1)^{d-\ell-k} &= t^{d-\ell} \\ &= t^{d-|F_j|}. \end{aligned}$$

En fin, tenemos la fórmula (8). □

No es cierto que cada complejo particionable es un complejo de Cohen-Macaulay, pero el converso aún es un problema abierto [35, Conj 2.7].

Conjetura 4.6 *Cada complejo de Cohen-Macaulay es particionable.*

Otros problemas abiertos tienen que ver con clases especiales de complejos de Cohen-Macaulay. Una clase de complejo de Cohen-Macaulay que aparece mucho en la literatura es el *complejo matroidal*. Un complejo Δ recibe el nombre de complejo matroidal si por cada par de caras $F, G \in \Delta$ con $|F| \leq |G|$, existe un elemento $x \in G$ tal que $F \cup \{x\}$ es una cara también. (Entonces un complejo matroidal es el complejo de conjuntos independientes de un matroide en el sentido de [42].) Como un complejo matroidal Δ es un complejo de Cohen-Macaulay, el h -vector h_Δ siempre es el f -vector de un multicomplejo Γ . Ahora, los complejos matroidales son una clase muy especial dentro de los complejos de Cohen-Macaulay. Nos preguntamos: ¿Es posible afirmar algo más fuerte? Stanley ha conjeturado que los monomios maximales de Γ son todos del mismo grado [31, p 59].

Conjetura 4.7 *Sea Δ un complejo matroidal con $h_\Delta = (h_0, \dots, h_d)$. Entonces existe un multicomplejo puro Γ tal que $f_\Gamma = h_\Delta$.*

Hay teoremas análogos a la Conjetura 4.7 para algunas clases de complejos de Cohen-Macaulay. Sea Δ es un complejo de Cohen-Macaulay y sea Γ un multicomplejo que satisface $f_\Gamma = h_\Delta$. Veremos en la próxima sección que si Δ tiene ciertas propiedades, entonces podemos exigir que Γ sea no sólo un multicomplejo, sino un complejo.

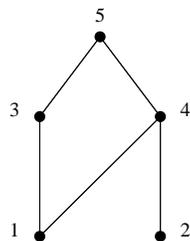


Figura 5.1: un conjunto parcialmente ordenado

5 Conjuntos Parcialmente Ordenados

Unos objetos de mucho interés en la combinatoria algebraica son los conjuntos parcialmente ordenados (o *posets* del inglés *partially ordered sets*). Como hemos hecho para los complejos simpliciales, definiremos para cada poset un f -vector y un h -vector. Además, definiremos una tercera sucesión que se llama el W -vector. Nos concentraremos en el caso particular de los retículos distributivos, una clase de poset que tiene unas interpretaciones sofisticadas tanto del h -vector como del f -vector. También veremos dos clases de complejos que generalizan los posets y sus h -vectores.

Un *poset* es un conjunto P con una relación $<_P$ que es transitivo y antireflexivo. Cada par de elementos distintos x, z en P satisface exactamente una de las afirmaciones siguientes:

1. $x <_P z$,
2. $z <_P x$,
3. x y z son incomparables.

Normalmente escribimos un diagrama por un poset que se llama el *diagrama de Hasse*. Si el elemento z está arriba del elemento x , y hay un camino de x hasta z que siempre sube, entonces $x <_P z$. Es posible marcar los elementos de cualquier poset con enteros de modo que $<_P$ respete el orden de los enteros, evitándonos tener que escribir $4 <_P 2$ cuando $2 < 4$ como enteros. Un poset con los elementos marcados de esta manera se dice que está *marcado naturalmente*.

Ejemplo 5.1 Sea P el poset de la Figura 5.1. El elemento 1 es menor que los elementos 3, 4, 5. El elemento 5 es mayor que todos los demás elementos. Los elementos 2 y 3 son incomparables.

Si todos los elementos de un poset P son comparables uno con el otro, entonces decimos que P es *totalmente ordenado*. Un subconjunto de P que es totalmente ordenado recibe el nombre de *cadena* de P . Note que cada elemento de P es una cadena, y que el conjunto vacío también es una cadena.

El f -vector de un poset P es la sucesión que cuenta cadenas por cardinalidad,

$$f_P = (f_{-1}, f_0, \dots, f_d)$$

donde f_{i-1} es el número de cadenas de i elementos. Naturalmente, el f -polinomio de P se define como $f_P(t) = f_{-1} + f_0 t + \dots + f_{d-1} t^d$. Hemos empezado por f_{-1} porque las cadenas del poset P forman un complejo simplicial $\Delta(P)$, que se llama el *complejo de orden* de P . Así tenemos que $f_P(t) = f_{\Delta(P)}(t)$. Definimos el h -polinomio y el h -vector de P de la manera natural,

$$\begin{aligned} h_P(t) &= (1-t)^d f_P\left(\frac{t}{1-t}\right) \\ &= h_0 + h_1 t + \dots + h_d t^d, \\ h_P &= (h_0, \dots, h_d). \end{aligned}$$

Ejemplo 5.2 Sea P el poset de la Figura 5.1. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} f_P(t) &= 1 + 5t + 7t^2 + 3t^3, \\ h_P(t) &= 1 + 2t. \end{aligned}$$

Ejercicio 5.3 Sea P el poset de la Figura 5.1. Dibuje el complejo de orden de P .

Para dar una interpretación combinatoria del h -vector, definimos primero las extensiones lineales de un poset, los descensos de una permutación, y una tercera sucesión. Una *extensión lineal* de un poset P es una lista de los elementos de P tal que si tenemos que $x <_P z$, entonces x viene antes de z en la lista. Escribimos $\mathcal{L}(P)$ para el conjunto de extensiones lineales de P .

Ejemplo 5.4 Sea P el poset de la Figura 5.1. Entonces las extensiones lineales son $\mathcal{L}(P) = \{12345, 13245, 12435, 21345, 21435\}$.

Sea $\pi = \pi_1 \dots \pi_n$ una permutación de las letras $[n] = \{1, \dots, n\}$. Una posición i recibe el nombre de *descenso de π* si tenemos que $\pi_i > \pi_{i+1}$. El conjunto de descensos de π se escribe $D(\pi)$ y el número de descensos de π se escribe $\text{des}(\pi)$,

$$\begin{aligned} D(\pi) &= \{i \in [n-1] \mid \pi_i > \pi_{i+1}\}, \\ \text{des}(\pi) &= \#\{i \in [n-1] \mid \pi_i > \pi_{i+1}\} \\ &= |D(\pi)|. \end{aligned}$$

Sea P un poset con n elementos. Definimos el W -vector y el W -polinomio de P como

$$W_P = (w_0, \dots, w_{n-1}),$$

$$W_P(t) = w_0 + w_1 t + \dots + w_{n-1} t^{n-1},$$

donde w_k es el número de extensiones lineales de P con k descensos,

$$w_k = \#\{\pi \in \mathcal{L}(P) \mid \text{des}(\pi) = k\}.$$

Note que $w_0 = 1$ si y sólo si el poset P está marcado naturalmente.

Ejemplo 5.5 Sea P el poset de la Figura 5.1. Marcando los descensos en las extensiones lineales de P con líneas verticales, tenemos que

$$\mathcal{L}(P) = \{12345, 13|245, 124|35, 2|1345, 2|14|35\}.$$

Entonces el W -vector y el W -polinomio son

$$W_P = (1, 3, 1),$$

$$W_P(t) = 1 + 3t + t^2.$$

Ejercicio 5.6 Sea P el poset de cuatro elementos sin relaciones entre ellos. (Un poset así recibe el nombre de *anticadena*.) Calcule $W_P(t)$.

Está claro que el f -vector y el W -vector de un poset siempre son positivos. Un poset tendrá también un h -vector positivo si su complejo de orden es un complejo de Cohen-Macaulay. En este caso el poset recibe el nombre de *poset de Cohen-Macaulay*. Ejemplos importantes son los retículos semimodulares, retículos modulares y retículos distributivos. Concentraremos en los retículos distributivos. (Vea [6] por interpretaciones de los h -vectores de los otros retículos.)

Hay dos definiciones populares de los retículos distributivos. La más adecuada para nuestros propósitos empleará la noción de *ideal de orden* de un poset. (La otra definición se encuentra en [36, pp 102-105].) Un subconjunto I de un poset P recibe el nombre de *ideal de orden* si por cada elemento z en I y cada elemento $x <_P z$, tenemos que $x \in I$. Esto quiere decir que si incluimos un elemento en I , entonces incluimos todos los elementos menores que él. A partir de los ideales de orden de P construimos otro poset $J(P)$:

1. Los elementos de $J(P)$ son los ideales de orden de P .
2. El orden $<_{J(P)}$ es inclusión (estricta) de conjuntos.

Cualquier poset $J(P)$ construido de esta manera para algún poset finito P recibe el nombre de retículo distributivo.

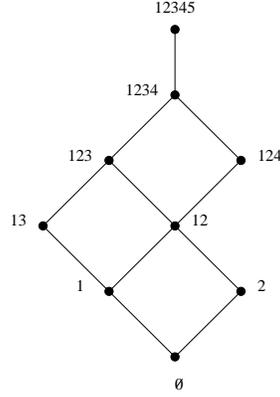


Figura 5.2: un retículo distributivo

Ejemplo 5.7 Sea P el poset de la Figura 5.1. La Figura 5.2 muestra su correspondiente retículo distributivo $J(P)$.

Ejercicio 5.8 Sea P la anticadena de cuatro elementos. Dibuje $J(P)$.

La interpretación combinatoria del h -vector de un retículo distributivo es el siguiente [30].

Teorema 5.1 Sea P un poset con n elementos y sea $J(P)$ el retículo distributivo correspondiente cuyo h -vector es $h_{J(P)} = (h_0, \dots, h_{n+1})$. Si P está marcado naturalmente, entonces h_i es el número de extensiones lineales de P que tienen i descensos,

$$h_i = \#\{\pi \in \mathcal{L}(P) \mid \text{des}(\pi) = i\}.$$

Equivalentemente tenemos que

$$h_{J(P)}(t) = W_P(t).$$

Demostración: Definamos una función $\alpha : 2^{[n-1]} \rightarrow \mathbb{N}$ de la siguiente manera. Por cada subconjunto $S = \{s_1, \dots, s_k\}$ de $[n-1]$ con $s_1 < \dots < s_k$, definamos $\alpha(S)$ como

$$\alpha(S) = \text{número de cadenas } (I_1 <_{J(P)} \dots <_{J(P)} I_k) \\ \text{tal que } |I_j| = s_j, \text{ por } j = 1, \dots, k.$$

Cada cadena así corresponde a una extensión lineal de P ,

$$\pi = \overline{I_1} \cdot \overline{I_2 \setminus I_1} \cdot \overline{I_3 \setminus I_2} \cdots \overline{I_k \setminus I_{k-1}} \cdot \overline{[n] \setminus I_k},$$

donde \overline{R} significa la permutación única de R que no tiene descensos. Entonces el conjunto de descensos de π está contenido en S . Más aún, el número $\alpha(S)$ tiene la interpretación

$$\alpha(S) = \#\{\pi \in \mathcal{L}(P) \mid D(\pi) \subset S\}.$$

Usando el método de inclusión y exclusión [36, Cap 2], definimos una función $\beta : 2^{[n-1]} \rightarrow \mathbb{N}$ como

$$\beta(S) = \sum_{T \subset S} (-1)^{|S \setminus T|} \alpha(T),$$

de modo que

$$\alpha(S) = \sum_{T \subset S} \beta(T).$$

Entonces el número $\beta(S)$ tiene la interpretación

$$\beta(S) = \#\{\pi \in \mathcal{L}(P) \mid D(\pi) = S\}.$$

La relación entre las funciones α , β y los vectores $f_{J(P)}$, $h_{J(P)}$ es la siguiente. Quitando el elemento mínimo y el elemento máximo de $J(P)$, definimos el poset

$$J(\widehat{P}) = J(P) \setminus \{\emptyset, [n]\},$$

de manera que

$$\begin{aligned} f_{J(P)}(t) &= f_{J(\widehat{P})}(t)(1+t)^2, \\ h_{J(P)}(t) &= h_{J(\widehat{P})}(t). \end{aligned}$$

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} h_{J(P)} &= (h_0, \dots, h_{n-1}, 0, 0), \\ h_{J(\widehat{P})} &= (h_0, \dots, h_{n-1}), \end{aligned}$$

y será suficiente considerar el h -vector de $J(\widehat{P})$ en vez del h -vector de $J(P)$.

Sea $f_{J(\widehat{P})} = (f_{-1}, f_0, \dots, f_{n-2})$ el f -vector de $J(\widehat{P})$. Evidentemente tenemos que

$$\sum_{S \in \binom{[n-1]}{j}} \alpha(S) = f_{j+1},$$

donde $\binom{[n-1]}{j}$ es la colección de subconjuntos de $[n-1]$ con cardinalidad j . Para acabar la prueba, sólo hace falta mostrar que tenemos

$$\sum_{S \in \binom{[n-1]}{j}} \beta(S) = h_j.$$

Dejamos esto como un ejercicio. □

Ejercicio 5.9 Sean $J(\widehat{P})$ y β el poset y la función de la prueba del Teorema 5.1. Muestre que

$$\sum_{S \in \binom{[n-1]}{j}} \beta(S) = h_j.$$

Observamos del Teorema 5.1 que el polinomio $W_P(t)$ no depende en como marcamos P , con tal que lo marquemos naturalmente. Esta observación es bastante curioso, dado que el conjunto de extensiones lineales depende en como marcamos P .

Pregunta 5.10 ¿Hay otra interpretación del W_P en terminos de P ?

Decimos que un poset es una *anticadena* si todos sus elementos son incomparables. Si P es una anticadena de n elementos, entonces $J(P)$ es el retículo de todos los subconjuntos de $[n]$ ordenado por inclusión. Este retículo distributivo se denomina el *álgebra de Boole* B_n . El Teorema 5.1 dice que el h -vector (h_0, \dots, h_{n-1}) del álgebra de Boole cuenta permutaciones por descenso,

$$h_i = \#\{\pi \in S_n \mid \text{des}(\pi) = i\}.$$

El h -polinomio correspondiente se denomina el *polinomio de Euler* y se escribe $A_n(t)$. Hay muchas interpretaciones de los coeficientes del polinomio de Euler en términos de estadísticas de permutaciones. (Vea por ejemplo [9], [10], [12], [13], [29], [36, pp 21-25].)

Como el complejo de orden de $J(P)$ es un complejo de Cohen-Macaulay, los Teoremas 4.4 y 5.1 nos dicen que existirá un multicomplejo Γ tal que los monomios de grado i en Γ corresponden a las extensiones lineales de P con i descensos. De hecho tenemos un resultado un poco más fuerte [5, Rem 6.6], [11, Cor 2.2].

Teorema 5.2 *Sea $J(P)$ un retículo distributivo. Entonces existe un complejo Γ tal que $f_\Gamma = h_{J(P)}$.*

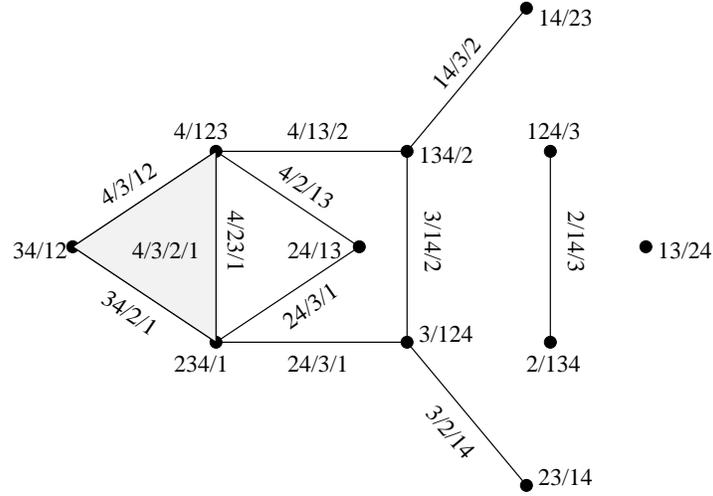


Figura 5.3: un complejo de extensiones lineales

Demostración: Sea π una extensión lineal de P con k descensos, escrito con líneas verticales después de cada descenso,

$$\pi = \pi_1 \cdots \pi_{i_1} | \pi_{i_1+1} \cdots \pi_{i_2} | \cdots | \pi_{i_k+1} \cdots \pi_n.$$

Si quitamos de π todas las líneas menos uno, y ordenamos todas las letras a la izquierda y a la derecha de esta línea, entonces construimos una extensión lineal de P que tiene sólo un descenso.

Definimos la cara $F(\pi)$ de Γ como el conjunto de las k permutaciones construidas de esta manera. No es difícil demostrar que la colección

$$\Gamma = \{F(\pi) \mid \pi \in \mathcal{L}(P)\}$$

es un complejo simplicial. \square

Ejemplo 5.11 Sea B_4 el álgebra de Boole construida del conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$. El complejo Γ en la Figura 5.3 satisface $f_\Gamma = h_{B_4}$.

Ejercicio 5.12 Sea P un poset en cuatro elementos. Muestre que el complejo Γ que satisface $f_\Gamma = h_{J(P)}$ es un subcomplejo del complejo en la Figura 5.3.

Existe una generalización del Teorema 5.2. Sea P un poset en n elementos y considere $\Delta(J(P))$, el complejo de orden del retículo distributivo $J(P)$. Cada vértice de $\Delta(J(P))$ es un ideal de orden de P , y cada cara de k vértices es una cadena de k elementos de $J(P)$ que son k ideales de orden de P con cardinalidades distintos. Entonces los vértices de $\Delta(J(P))$ se pueden colorear con $n + 1$ colores de modo que ninguna cara tenga dos vértices del mismo color. Un complejo con esta propiedad recibe el nombre de *complejo equilibrado*. Ser equilibrado es una propiedad de todos los complejos de orden, no sólo de los que corresponden a los retículos distributivos.

Si un complejo de Cohen-Macaulay es equilibrado, entonces tenemos la interpretación siguiente del h -vector [32, Cor 4.5].

Teorema 5.3 *Sea Δ un complejo de Cohen-Macaulay que es equilibrado. Entonces existe otro complejo equilibrado Γ tal que $f_\Gamma = h_\Delta$.*

Ejercicio 5.13 Aplique el Teorema 5.1 para mostrar que el complejo Γ del Teorema 5.2 es equilibrado.

Note que el Teorema 5.2 corresponde al caso especial del Teorema 5.3 en el cual el complejo Δ es el complejo de orden de un retículo distributivo. Entonces podemos elegir el complejo Γ en el Teorema 5.2 de modo que sea equilibrado. Por otra parte, tantas restricciones en Δ deberían garantizar que Γ tenga algunas buenas propiedades. Tal vez podemos elegir Γ de modo que sea un complejo de orden [28, Conj 6.1].

Conjetura 5.4 *Sea P un poset finito. Entonces existe otro poset finito Q tal que $f_Q = h_{J(P)}$.*

Un caso especial de la Conjetura 5.4 ya se ha demostrado [28, Tm 3.2].

Teorema 5.5 *Sea P una unión disjunta de cadenas. Entonces existe un poset Q tal que $f_Q = h_{J(P)}$.*

Aparte del ser equilibrado, otra propiedad importante de un complejo de orden es que siempre es un *complejo de bandera*. Esto quiere decir que no existen tres caras $\{x_1, x_2\}$, $\{x_2, x_3\}$, $\{x_1, x_3\}$ sin que el conjunto $\{x_1, x_2, x_3\}$ sea una cara también. Un problema interesante concerniente a los complejos de bandera es la siguiente conjetura no publicada de Kalai. (Vea [35, p 100].)

Conjetura 5.6 *Sea Δ un complejo bandera. Entonces existe un complejo equilibrado Γ tal que $f_\Gamma = f_\Delta$. Más aún, si Δ es un complejo bandera de Cohen-Macaulay, entonces podemos elegir Γ de modo que sea un complejo equilibrado de Cohen-Macaulay.*

Es curioso que haya tantas relaciones entre los f -vectores y los h -vectores de objetos distintos cuando las diferentes definiciones de los vectores no muestran estas relaciones directamente. Existe otra relación curiosa entre los f y h polinomios y los polinomios con raíces reales. En cuanto a esta relación, veremos en la Sección 6 que hay más conjeturas que teoremas.

6 Polinomios con raíces reales

El problema de decidir si las raíces de un polinomio $a(t) \in \mathbb{R}[t]$ son reales ha interesado a la comunidad matemática desde al menos los tiempos de Newton. (Vea [33, p 504].) Desde entonces se han descubierto varios teoremas que ubican a las raíces de $a(t)$ dentro del plano complejo en función de sus coeficientes. En una versión moderna de este problema, se pregunta si cada miembro de una clase de polinomios definidos combinatoriamente tiene todas sus raíces reales. Por ejemplo, dos conjeturas bien conocidas afirman que algunas de las clases de polinomios que hemos visto en la Sección 5 tienen esta propiedad. Después de ver las conjeturas, repasaremos los resultados clásicos que tal vez podrán emplearse para resolverlas.

Empezamos con la *Conjetura del Retículo Distributivo* de Neggers [23, p 114].

Conjetura 6.1 *Sea $J(P)$ un retículo distributivo. Entonces todas las raíces de $f_{J(P)}(t)$ son reales.*

Usando la fórmula (4), observamos que es equivalente conjeturar que todas las raíces de $h_{J(P)}(t)$ sean reales,

$$h_{J(P)}(\lambda) = 0 \iff f_{J(P)}\left(\frac{1}{1-\lambda}\right) = 0.$$

Usando el Teorema 5.1, observamos que también es equivalente conjeturar que todas las raíces de $W_P(t)$ sean reales, con tal que hayamos marcado P naturalmente.

Más general que la Conjetura 6.1 es la *Conjetura del Poset* de Stanley. (Vea, por ejemplo [39, p 23].)

Conjetura 6.2 *Sea P un poset marcado aunque no necesariamente de manera natural. Entonces todas las raíces de $W_P(t)$ son reales.*

Durante los últimos treinta años, varios matemáticos han demostrado que las conjeturas son ciertas en casos especiales [7], [25], [41]. Más aún, la Conjetura 6.1 es cierta para todos los retículos distributivos $J(P)$ con $|P| \leq 10$, y la Conjetura 6.2 es cierta para todos los posets P con $|P| \leq 8$. (Eso se ha verificado con ayuda de una computadora [40], usando el programa *Maple*.) Sin embargo, nuestras conjeturas siguen siendo conjeturas. Tampoco se sabe si es cierta la generalización de la Conjetura 6.1 a la clase de los retículos modulares.

Pregunta 6.1 Sea L un retículo modular. ¿Son reales todas las raíces de $f_L(t)$?

Considere ahora cualquier polinomio $a(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_d t^d$ con coeficientes reales y positivos, tal como los polinomios de las Conjeturas 6.1 y 6.2. Para que el polinomio $a(t)$ tenga todas las raíces reales, dos condiciones necesarias son que la sucesión $a = (a_0, \dots, a_d)$ sea *unimodal* y *log-concava*. Decimos que a es *unimodal* si existe un índice j tal que

$$a_0 \leq \dots \leq a_j \geq \dots \geq a_d.$$

Decimos que a es *log-concava* si tenemos que

$$a_i^2 \geq a_{i-1} a_{i+1}, \quad i = 1, \dots, d-1.$$

La necesidad de log-concavidad es un resultado de Newton, y es fácil ver que la log-concavidad implica la unimodalidad para sucesiones positivas. (La log-concavidad también es necesaria en el caso que a no es positiva. Vea [33, p 504].) Sería interesante saber si las sucesiones en las Conjeturas 6.1 y 6.2 son al menos log-concavas o unimodales, pero estos problemas también están abiertos. (Vea [17] por una respuesta parcial.)

Pregunta 6.2 Sea P un poset finito. ¿Son log-concavas o unimodales las sucesiones $f_{J(P)}$ y $h_{J(P)}$?

Pregunta 6.3 Sea P un poset finito. ¿Es log-concava o unimodal la sucesión W_P ?

Mientras las condiciones de log-concavidad y unimodalidad son solamente necesarias para garantizar que todas las raíces de $a(t)$ sean reales, hay otros resultados que dan condiciones que son necesarias y también suficientes. Un teorema bien conocido de Aissen, Schoenberg, y Whitney [1] da una caracterización en términos de matrices totalmente positivas. (Vea también [39, p 21].) Una matriz es *totalmente positiva* si todos sus menores son mayores que o iguales a cero. (Vea [2] y [14].)

Teorema 6.3 Sea (a_0, \dots, a_d) una sucesión de números reales y positivos, y sea A la matriz infinita de Toeplitz A correspondiente,

$$A = (a_{j-i}) = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

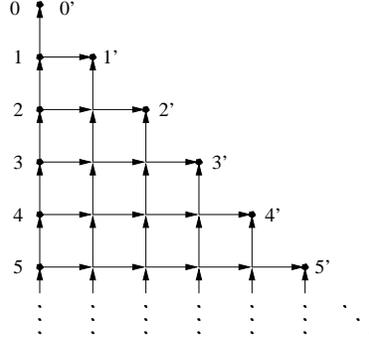


Figura 6.1: el grafo de Gessel y Viennot

donde $a_m = 0$ si $m > d$. Entonces el polinomio $a(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_dt^d$ tiene todas las raíces reales si y sólo si A es totalmente positiva.

Note que el Teorema 6.3 implica la log-concavidad de (a_0, \dots, a_d) cuando todas las raíces de $a(t)$ son reales. Es una lástima que el número de determinantes que tenemos que considerar en el Teorema 6.3 sea infinito. Sin embargo, hay resultados que dan una interpretación combinatoria para todos los determinantes de una matriz infinita. Un resultado bien conocido es el siguiente [18].

Teorema 6.4 Sea G el grafo infinito de la Figura 6.1. Sea B la matriz infinita cuyas entradas vienen dadas por los coeficientes binomiales de la siguiente manera,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Sean S y T dos conjuntos de la misma cardinalidad,

$$S = \{s_1, \dots, s_n\}, \quad 0 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_n,$$

$$T = \{t_1, \dots, t_n\}, \quad 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n.$$

Entonces el determinante de la submatriz de B correspondiente a las filas S y las columnas T es el número de familias de caminos $\Pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ en G , donde π_i es un camino desde s_i hasta t'_i y donde los caminos no se intersecan.

El método de la prueba del Teorema 6.4 viene de resultados de Karlin y MacGregor [20] y de Linström [21]. Sería interesante emplear este método para solucionar las Conjeturas 6.1 y 6.2.

Pregunta 6.4 Sea P un poset y sea A la matriz infinita de Toeplitz que corresponde a W_P (o $f_{J(P)}$ o $h_{J(P)}$). ¿Se puede definir un grafo $G(P)$ de modo que los determinantes de A cuenten familias de caminos en $G(P)$?

Otra caracterización de polinomios con raíces reales emplea funciones simétricas. Si factorizamos el polinomio $a(t) = 1 + a_1 t + \dots + a_d t^d$ como

$$a(t) = \prod_{i=1}^d (1 + \lambda_i t), \quad (9)$$

entonces sus coeficientes son funciones simétricas *elementales* en los números $\lambda_1, \dots, \lambda_d$,

$$\begin{aligned} 1 &= e_0(\lambda_1, \dots, \lambda_d), \\ a_1 &= e_1(\lambda_1, \dots, \lambda_d) = \sum_{i:1 \leq i \leq d} \lambda_i, \\ a_2 &= e_2(\lambda_1, \dots, \lambda_d) = \sum_{i,j:1 \leq i < j \leq d} \lambda_i \lambda_j, \\ &\vdots \\ a_d &= e_d(\lambda_1, \dots, \lambda_d) = \lambda_1 \cdots \lambda_d. \end{aligned}$$

Otras funciones simétricas de interés son las funciones simétricas de *sumas de potencias*,

$$p_k(\lambda_1, \dots, \lambda_d) = \sum_{i=1}^d \lambda_i^k,$$

que se pueden expresar en términos de las funciones simétricas elementales,

$$\begin{aligned} p_0 &= d, \\ p_1 &= e_1, \\ p_2 &= -2e_2 + e_1^2, \\ p_3 &= 3e_3 - 3e_2e_1 + e_1^3, \\ p_4 &= -4e_4 + 4e_3e_1 + 2e_2^2 - 4e_2e_1^2 + e_1^4, \\ &\vdots \end{aligned}$$

El teorema siguiente fue descubierto por Gantmacher [15, p 203].

Teorema 6.5 Sea $a(t) = 1 + a_1t + \cdots + a_d t^d$ un polinomio con coeficientes reales. Factorice $a(t)$ como en (9) y sean p_0, \dots, p_{2d-2} las funciones simétricas de sumas de potencias en $\lambda_1, \dots, \lambda_d$. Entonces todas las raíces de $a(t)$ son reales y distintas si y sólo si la matriz finita de Hankel

$$C = \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_{d-1} \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_d \\ p_2 & p_3 & p_4 & \cdots & p_{d+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{d-1} & p_d & p_{d+1} & \cdots & p_{2d-2} \end{bmatrix}$$

es definida positiva.

Lo bueno del Teorema 6.5 es que da una lista *finita* de sólo $d - 1$ desigualdades

$$\det[c_{ij}]_{i,j=0}^k \geq 0, \quad k = 1, \dots, d - 1.$$

Lo malo es que los determinantes son funciones complicadas de a_1, \dots, a_d . El Teorema 6.5 nunca se ha usado para demostrar la realidad de las raíces de ningún polinomio definido combinatoriamente [39, p 21].

Pregunta 6.5 Sea P un poset finito. ¿Hay una interpretación combinatoria por los determinantes de Gantmacher cuando la matriz C corresponde al polinomio $f_{J(P)}(t)$? (¿o $h_{J(P)}(t)$, o $W_P(t)$?)

Otro teorema que emplea funciones simétricas para caracterizar los polinomios con todas las raíces reales y que es equivalente al Teorema 6.3 es el siguiente [37, Tm 2.11]. (Vea [38, Cap 7] por definiciones.)

Teorema 6.6 Sea $a(x) = 1 + a_1x + \cdots + a_d x^d$ un polinomio con coeficientes reales y positivos. Defina $F(a; x)$, una función simétrica formal en las variables x_1, x_2, \dots , como

$$F(a; x) = \prod_{i \geq 1} a(x_i).$$

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Todas las raíces de $a(t)$ son reales.
2. La expansión de $F(a; x)$ en términos de las funciones simétricas elementales $e_\mu(x)$ tiene coeficientes positivos.
3. La expansión de $F(a; x)$ en términos de las funciones simétricas de Schur $s_\mu(x)$ tiene coeficientes positivos.

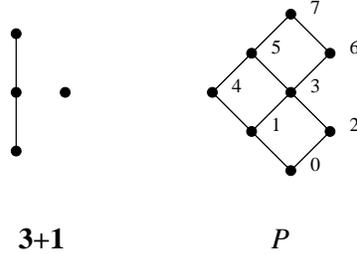


Figura 6.2: el poset $\mathbf{3} + \mathbf{1}$ y otro poset que no es libre de $\mathbf{3} + \mathbf{1}$

El Teorema 6.6 se ha empleado para demostrar que todas las raíces del polinomio $f_P(t)$ son reales por una clase especial de poset [16], [37, Cor 2.9].

Teorema 6.7 *Sea P es un poset libre de $\mathbf{3} + \mathbf{1}$. Entonces las raíces de $f_P(t)$ son reales.*

El poset $\mathbf{3} + \mathbf{1}$ es la unión disjunta de una cadena de tres elementos y un elemento. Un poset P se llama *libre de $\mathbf{3} + \mathbf{1}$* si no contiene cuatro elementos w, x, y, z que tienen entre ellos los mismos relaciones que $\mathbf{3} + \mathbf{1}$.

Ejemplo 6.6 La Figura 6.2 muestra el poset $\mathbf{3} + \mathbf{1}$ junto con otro poset P que no es libre de $\mathbf{3} + \mathbf{1}$. Note que los elementos $\{2, 3, 6\}$ satisfacen $2 <_P 3 <_P 6$ y que ninguno de ellos es comparable a 4.

Por desgracia, no ha sido posible aplicar el Teorema 6.6 a las Conjeturas 6.1 y 6.2, ni siquiera para el caso especial de las álgebras de Boole. (Vea [39, Tm 2].)

Pregunta 6.7 Sea f_{B_n} el f -vector del álgebra de Boole B_n . ¿Hay una interpretación combinatoria de los coeficientes en las expansiones de $F(f_{B_n}, x)$ mencionadas en el Teorema 6.6?

Un último teorema da una identidad entre el polinomio de cadenas de un poset y el polinomio característico de su matriz de *antiadyacencia* [34].

Teorema 6.8 *Sea P un poset. Defina la matriz de antiadyacencia $A = [a_{ij}]$ como*

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i <_P j, \\ 1 & \text{si no.} \end{cases}$$

Entonces tenemos que

$$f_P(t) = \det(At + I).$$

Note que las raíces del polinomio $f_P(t)$ son reales si y sólo si los autovalores de la matriz de antiadyacencia son reales. Usando [2, Tm 1.1] y el Teorema de Frobenius-Perron, uno puede mostrar que los autovalores de una matriz totalmente positiva son reales y positivos. Esta propiedad se puede emplear para dar una demostración del Teorema 6.7 sin utilizar las funciones simétricas [27].

Aunque un poset libre de $\mathbf{3} + \mathbf{1}$ no parece tener mucho que ver con los retículos distributivos, es posible que exista una conexión [26, Sec 4.6]. Para cada poset P con $|P| \leq 7$, existe un poset Q libre de $\mathbf{3} + \mathbf{1}$ tal que

$$f_Q(t) = h_{J(P)}(t). \quad (10)$$

Si la ecuación (10) fuera cierta en general, entonces tendríamos una demostración para las Conjeturas 5.4 y 6.1. Quizás valdrá la pena considerar la siguiente pregunta.

Pregunta 6.8 ¿Qué condiciones en un poset P garantizan la existencia de otro poset Q , libre de $\mathbf{3} + \mathbf{1}$, tal que $f_Q(t) = h_{J(P)}(t)$?

Quizás valdrá la pena también considerar otra pregunta que es más o menos el recíproco de las Conjeturas 6.1 y 6.2.

Pregunta 6.9 Sea $a(t) = 1 + a_1t + \cdots + a_d t^d$ un polinomio con coeficientes enteros positivos y con todas sus raíces reales. ¿Existe un poset P tal que $f_P(t) = a(t)$? ¿o un complejo simplicial Δ tal que $f_\Delta(t) = a(t)$?

7 Agradecimientos

Mil gracias a Mercedes Rosas, Argimiro Arratia, Ana Bravo, Sergi Elizalde y Federico Ardila, que me ayudaron mucho con este trabajo. También quiero agradecer al departamento de matemáticas de la Universidad Simón Bolívar, que me permitió presentar este trabajo y que me ayudó mejorar la versión original.

Referencias

- [1] M. AISSSEN, I. J. SCHOENBERG, Y A. WHITNEY. On generating functions of totally positive sequences. *J. Anal. Math.*, **2** (1952) pp. 93–103.
- [2] T. ANDO. Totally positive matrices. *Linear Algebra Its Appl.*, **90** (1987) pp. 165–219.

-
- [3] M. F. ATIYAH Y I. MACDONALD. *Commutative Algebra*. Addison-Wesley, London, 1969.
- [4] L. J. BILLERA Y A. BJÖRNER. Face numbers of polytopes and complexes. En *Handbook of Discrete and Computational Geometry* (J. E. GOODMAN Y J. O'ROURKE, eds.). CRC Press, Boca Raton/New York, 1997 pp. 291–310.
- [5] A. BJÖRNER, P. FRANKL, Y R. STANLEY. The number of faces of balanced Cohen-Macaulay complexes and a generalized Macaulay theorem. *Combinatorica*, **7** (1987) pp. 23–34.
- [6] A. BJÖRNER, A. GARSIA, Y R. STANLEY. An introduction to the theory of Cohen-Macaulay posets. En *Ordered Sets* (I. RIVAL, ed.). Reidel, Dordrecht/Boston/London, 1982 pp. 583–615.
- [7] F. BRENTI. *Unimodal, Log-Concave, and Pólya Frequency Sequences in Combinatorics*. No. 413 en Mem. Amer. Math. Soc. American Mathematical Society, Providence, RI, 1989.
- [8] W. BRUNS Y J. HERZOG. *Cohen-Macaulay Rings*. Cambridge University Press, London, 1993.
- [9] R. J. CLARKE, E. STEINGRÍMSSON, Y J. ZENG. New Euler-Mahonian statistics on permutations and words. *Adv. Appl. Math.*, **18** (1997) pp. 237–270.
- [10] D. DUMONT. Interprétations combinatoires des nombres de Genocchi. *Duke Math. J.*, **41** (1974) pp. 305–318.
- [11] P. EDELMAN Y V. REINER. H -shellings and h -complexes. *Adv. Math.*, **106** (1994) pp. 36–64.
- [12] D. FOATA. Distributions Eulériennes et Mahoniennes sur le groupe des permutations. En *Higher Combinatorics* (M. AIGNER, ed.), vol. 19. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland, 1977 pp. 27–49.
- [13] D. FOATA Y D. ZEILBERGER. Denert's permutation statistic is indeed Euler-Mahonian. *Studies in Appl. Math.*, **83** (1990) pp. 31–59.
- [14] S. FOMIN Y A. ZELEVINSKY. Total positivity: Tests and parametrizations. *Math. Intelligencer*, (2001) pp. 23–33.
- [15] F. R. GANTMACHER. *The Theory of Matrices*, vol. 2. Chelsea, New York, 1959.
- [16] V. GASHAROV. Incomparability graphs of $(\mathbf{3} + \mathbf{1})$ -free posets are s -positive. *Disc. Math.*, **157** (1996) pp. 211–215.

- [17] V. GASHAROV. On the Neggers-Stanley conjecture and the Eulerian polynomials. *J. Combin. Theory Ser. A*, **82** (1998) pp. 134–146.
- [18] I. GESSEL Y G. VIENNOT. Binomial determinants, paths, and hook length formulae. *Advances in Mathematics*, **58** (1985) pp. 300–321.
- [19] C. GREENE Y D. KLEITMAN. Proof techniques in the theory of finite sets. En *Studies in Combinatorics* (G. C. ROTA, ed.). Mathematical Association of America, 1978 pp. 22–79.
- [20] S. KARLIN Y G. MCGREGOR. Coincidence probabilities. *Pacific J. Math.*, **9** (1959) pp. 1141–1164.
- [21] B. LINDSTRÖM. On the vector representations of induced matroids. *Bull. London Math. Soc.*, **5** (1973) pp. 85–90.
- [22] F. S. MACAULAY. Some properties of enumeration in the theory of modular systems. *Proc. London Math. Soc.*, **26** (1927) pp. 531–555.
- [23] J. NEGGERS. Representations of finite partially ordered sets. *J. Combin. Inform. System Sci.*, **3** (1978) pp. 113–133.
- [24] G. REISNER. Cohen-Macaulay quotients of polynomial rings. *Advances in Math*, **21** (1976) pp. 30–49.
- [25] R. SIMION. A multiindexed Sturm sequence of polynomials and unimodality of certain combinatorial sequences. *J. Combin. Theory Ser. A*, **36** (1984) pp. 15–22.
- [26] M. SKANDERA. *Chain Polynomials and Permutation Statistics*. Ph.D. thesis, MIT, Cambridge, MA, 2000.
- [27] M. SKANDERA. A characterization of $(\mathbf{3} + \mathbf{1})$ -free posets. *J. Combin. Theory Ser. A*, **93** (2001) pp. 231–241.
- [28] M. SKANDERA. Dumont’s statistic on words. *Elec. J. Combin.*, **8** (2001).
- [29] M. SKANDERA. An Eulerian partner for inversions. *Sém. Lothar. Combin.*, **46** (2001).
- [30] R. STANLEY. *Ordered Structures and Partitions*. Ph.D. thesis, Harvard University, 1971.
- [31] R. STANLEY. Cohen-Macaulay complexes. En *Higher Combinatorics* (M. AIGNER, ed.), vol. 19. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland, 1977 pp. 51–62.

-
- [32] R. STANLEY. Balanced Cohen-Macaulay complexes. *Trans. of the AMS*, **241** (1979) pp. 139–157.
- [33] R. STANLEY. Log-concave and unimodal sequences in algebra, combinatorics, and geometry. En *Graph Theory and its Applications: East and West*, vol. 576. Annals of the New York Academy of Sciences, December 29, 1989 pp. 500–535.
- [34] R. STANLEY. A matrix for counting paths in acyclic digraphs. *J. Combin. Theory Ser. A*, **74** (1996) pp. 169–172.
- [35] R. STANLEY. *Combinatorics and Commutative Algebra*. Birkhäuser, Boston, MA, 1996.
- [36] R. STANLEY. *Enumerative Combinatorics*, vol. 1. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [37] R. STANLEY. Graph colorings And Related Symmetric functions: Ideas and Applications. *Discrete Math.*, **193** (1998) pp. 267–286.
- [38] R. STANLEY. *Enumerative Combinatorics*, vol. 2. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [39] R. STANLEY. Positivity problems and conjectures. En *Mathematics: Frontiers and Perspectives* (V. ARNOLD, M. ATIYAH, P. LAX, y B. MAZUR, eds.). American Mathematical Society, Providence, RI, 2000 pp. 295–319.
- [40] J. STEMBRIDGE, 2001. Personal communication.
- [41] D. WAGNER. Enumeration of functions from posets to chains. *Europ. J. Combin.*, **13** (1992) pp. 313–324.
- [42] D. WELSH. *Matroid Theory*. Academic Press, 1976.