DOCE LECCIONES EN COMBINATORIA ALGEBRAICA

FEDERICO ARDILA, MERCEDES ROSAS, MARCOS SKANDERA

Resumen. Damos una exposición de varios resultados y problemas abiertos en las áreas de matrices totalmente no negativas, funciones simétricas, teoría de las representaciones de S_n y arreglos de hiperplanos.

1. Introducción

(algo así:) Muchos problemas en matemáticas se pueden solucionar fácilmente con la utilización de *objetos combinatorios* como grafos, particiones, y conjuntos parcialmente ordenados (posets). Por ejemplo, ...

En doce lecciones veremos otros ejemplos que surgen en las áreas de matrices totalmente no negativas, funciones simétricas, teoría de las representaciones de S_n y arreglos de hiperplanos.

2. Matrices totalmente no negativas

Sea A una matriz $n \times n$ matrix y sean I e I' dos subconjuntos de $[n] = \{1, \ldots, n\}$. Definimos $A_{I,I'}$ como la submatriz de A que se construye a partir de A con las entradas correspondientes a las filas en I y las columnas en I'. El determinante de esta submatriz recibe el nombre del *menor* (I, I') *de* A, y se escribe $\Delta_{I,I'}$,

$$\Delta_{I,I'} = \det A_{I,I'}.$$

(Para hablar del menor (I, I'), necesitamos que $|I| = |I'|$.) Decimos que una matriz es *totalmente no negativa* si todos sus menores son mayores que o iguales a cero, y *totalmente positiva* si todos los menores son mayores que cero.

Un ejemplo de una matriz totalmente no negativa es

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 & 0 \\ 4 & 7 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}. \tag{2.1}$$

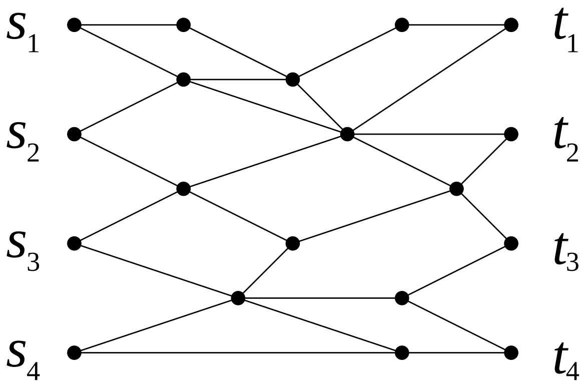


FIGURA 2.1. Una red plana de orden 4.

Se puede mostrar, aunque sea tedioso, que todos los menores de la matriz anterior, como por ejemplo

$$\Delta_{\{1,2\},\{1,3\}} = \det \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} = 8,$$

son mayores que o iguales a cero.

Matrices totalmente no negativas aparecen en varias áreas de matemáticas como ecuaciones diferenciales [13], ceros de polinomios [1], [2, p. 241], [12, Cap. XV], procesos estocásticos [17], [7], matroides [18], grupos de Lie [21], y geometría algebraica [9], [8], [23], y conjuntos parcialmente ordenados [26], [30]. Estas matrices aparecen también en economía [16], ingeniería eléctrica [5], y química [24].

En los artículos de Karlin y McGregor [17] y Lindström [18], las matrices surgieron en conexión con ciertos grafos denominados *redes planas*. Una *red plana de orden* n es un grafo dirigido acíclico que se puede dibujar en el plano sin que las aristas se corten en puntos diferente de los vértices, y tal que hay $2n$ vértices en el límite distinguidos como n *fuentes* y n *términos*. Daremos por supuesto que las fuentes y los términos, ordenados contra el sentido de las agujas del reloj, tienen las etiquetas $s_1, \ldots, s_n, t_n, \ldots, t_1$.

La Figura 2.1 muestra una red plana de orden 4. En figuras daremos por supuesto que cada arista tiene orientación hacia la derecha a menos que indiquemos otra orientación.

Dada una red plana, definimos la *matriz de caminos* $W = [w_{ij}]$ de G como

$$w_{ij} = \#\text{ caminos desde } s_i \text{ hasta } t_j \text{ en } G.$$

La matrix de caminos de la red plana en la Figura 2.1 está en la Ecuación (2.1).

Teorema 2.1. *(El lema de Lindström): La matriz de caminos de una red plana es totalmente no negativa. En particular, el menor $\Delta_{I,J}$ es igual al número de familias de n caminos disjuntos desde las fuentes I hasta los términos J.*

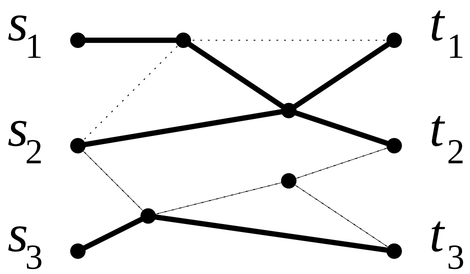


Figura 2.2. Un conjunto de aristas que define una familia de caminos desde s_1, s_2, s_3 hasta t_1, t_2, t_3 (respectivamente) y una familia de caminos desde s_1, s_2, s_3 hasta t_2, t_1, t_3 (respectivamente).

Demostración: Usando inducción, supongamos que por todas las redes planas de orden menor que n, las matrices de caminos correspondientes son totalmente no negativas. (Esto es cierto por $n = 1$.) Sea G una red plana de orden n con matriz de caminos W. Dado que cada submatriz de W es la matriz de caminos de una subred de G, tenemos que mostrar simplemente que el determinante de W es igual al número de familias $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ de n caminos en G en las cuales π_i es un camino desde s_i hasta t_i, por $i = 1, \ldots, n$, y en las cuales no hay ningún vértice que pertenece a dos caminos.

Veamos el producto $w_{1,1} \cdots w_{n,n}$, que aparece en el determinante de W,

$$\det W = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) w_{1,\sigma(1)} \cdots w_{n,\sigma(n)}.$$

Este producto es igual al número de familias de n caminos en G en las cuales el camino i va desde s_i hasta t_i, y donde se permitan intersecciones. Sea $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ una familia tal en la cual hay exactamente una intersección, y sean π_j y π_{j+1} los caminos que se intersectan. Entonces, el conjunto de aristas utilizadas por π es el mismo conjunto de aristas utilizadas por la familia

$$\pi' = (\pi_1, \ldots, \pi_{j-1}, \pi'_j, \pi'_{j+1}, \pi_{j+2}, \ldots, \pi_n)$$

que se construye intercambiando a los caminos π_j y π_{j+1} a partir de su intersección. (Vea la Figura 2.2.)

La segunda familia es contada por el producto

$$w_{1,1} \cdots w_{j-1,j-1} w_{j,j+1} w_{j+1,j} w_{j+2,j+2} \cdots w_{n,n},$$

que aparece con signo -1 porque la permutación correspondiente es una transposición de j y $j+1$. Tenemos entonces que la contribución total de estas dos familias al determinante es cero. Similarmente, una familia con k intersecciones es contada 2^k veces en el determinante, 2^{k-1} veces con signo $+1$ y 2^{k-1} veces con signo -1. Las

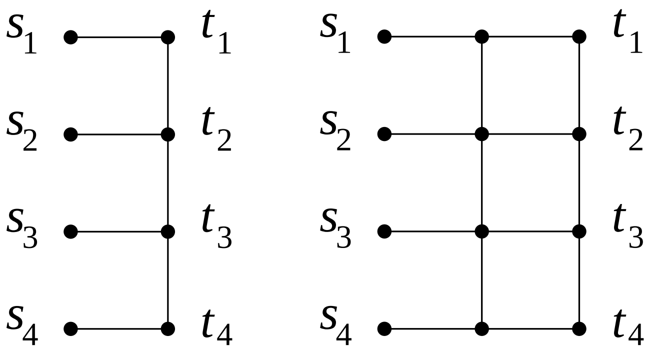


FIGURA 2.3. Dos redes planas.

únicas familias que son contadas exactamente una vez (con signo +1) son aquellas en las cuales no hay ninguna intersección. □

El Lema de Lindström nos da una demostración fácil que ciertas matrices son totalmente no negativas. Por ejemplo las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

son totalmente no negativas porque son las matrices de caminos de las redes planas de la Figura 2.3, donde las aristas tiene orientación hacia la derecha y hacia arriba.

Lindström [18] (y Karlin y McGregor [17]) demostraron Teorema 2.1 en más generalidad de la que hemos escrito arriba. Dado una red plana G cuyas aristas tienen pesos positivos y reales, definimos el *peso* de un camino como el producto de los pesos de sus aristas, y definimos la *matriz de pesos* $W = [w_{ij}]$ de G como

$$w_{ij} = \text{suma de pesos de caminos desde } s_i \text{ hasta } t_j \text{ en } G.$$

La matriz de pesos también es totalmente no negativa y sus menores se pueden interpretar en términos de familias de caminos, cada familia con peso igual al producto de pesos de sus caminos.

Teorema 2.2. *La matriz de pesos de una red plana es totalmente no negativa. En particular, el menor $\Delta_{I,J}$ es igual a la suma de pesos de familias de caminos disjuntos desde fuentes I hasta términos J.*

Note que el Teorema 2.1 es el caso especial del Teorema 2.2 que corresponde a peso 1 en cada arista. La demostración del Teorema 2.2 es muy similar a la del Teorema 2.1.

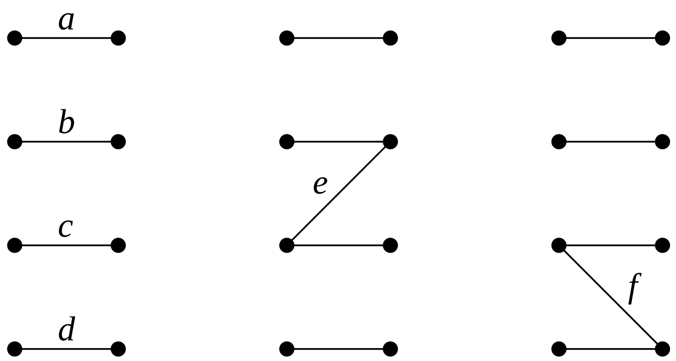


FIGURA 2.4. Tres redes planas elementales.

Una propiedad interesante de las matrices totalmente no negativas se muestra en la Figura 2.3. Las matrices en (2.2) satisfacen la ecuación $A^2 = B$, y una red plana que corresponde a B se puede construir utilizando dos copias de la red que corresponde a A. En general, multiplicar matrices totalmente no negativas corresponde a concatenación de redes planas. Este hecho se sigue directamente de la definición de multiplicación de matrices, y implica que el conjunto de matrices totalmente no negativas es cerrado bajo la operación de multiplicación.

La equivalencia entre multiplicación y concatenación tiene una consequencia extraordinaria. Whitney [36] y Loewner [19] demostraron que cada matriz totalmente no negativa e invertible se puede factorizar como un producto de matrices totalmente no negativas

$$L_1 \cdots L_m D U_1 \cdots U_m, \tag{2.3}$$

de modo que D sea una matriz diagonal, L_i tenga la forma $I + cE_{j+1,j}$, y U_i tenga la forma $I + cE_{j,j+1}$, donde $E_{k,\ell}$ es la matriz que tiene 1 en la posición k, ℓ y cero en todas las demás posiciones. Además, Cryer [4] demostró que *cualquier* matriz totalmente no negativa se puede factorizar de esta manera. Está claro que los factores que aparecen en (2.3) son matrices de pesos de redes planas [3]. La Figura 2.4 muestra las redes planas cuyas matrices de pesos son

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & e & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vemos entonces que las matrices de pesos no son solamente una clase importante de matrices totalmente no negativas; son la única clase de ellas.

Teorema 2.3. *Cada matriz $n \times n$ que es totalmente no negativa es la matriz de pesos de una red plana de orden n.*

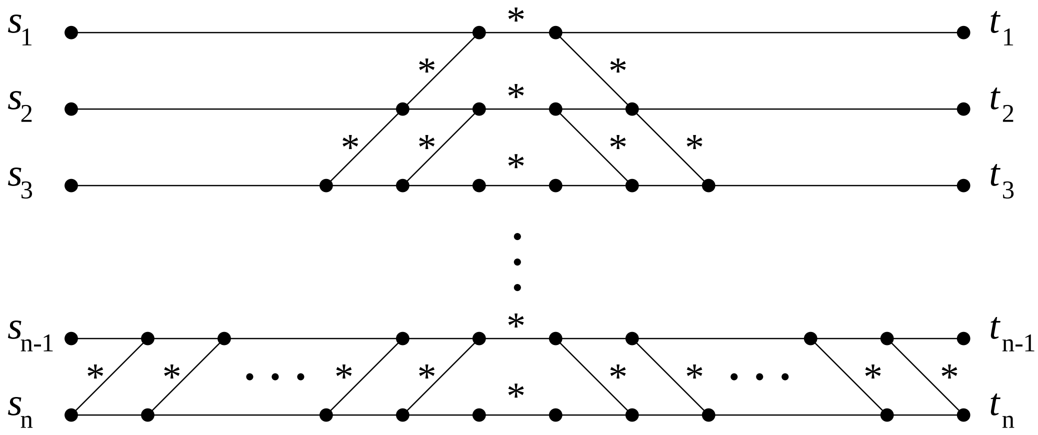


FIGURA 2.5. Una red plana genérica de orden n que corresponde a una matriz $n \times n$ totalmente positiva e invertible.

Aunque no existe una *única* red plana que corresponda a una fija matriz totalmente no negativa, si la matriz es invertible, podemos eligir una red plana que tenga la forma mostrada en la Figura 2.5 [10]. Entonces podemos calcular de manera única los pesos indicados por $*$. Estos pesos son funciones racionales de las entradas de la matriz. Entonces si la matriz tiene entradas enteras, los pesos serán números racionales.

Observación 2.4. *Por cada matriz A totalmente no negativa con entradas enteras, existe un entero k tal que kA es la matriz de caminos de una red plana sin pesos.*

Como uno esperaría, el hecho de que una matriz sea totalmente no negativa nos da información sobre sus valores propios.

Teorema 2.5. *Todos los valores propios de una matriz totalmente no negativa son números reales.*

Una demostración sencilla utiliza álgebra exterior. (Vea [2, pp. 167-172].) Dado una matriz A $n \times n$, la potencia exterior k de A, escrita $\wedge^k A$, se puede definir como la matriz $\binom{n}{k} \times \binom{n}{k}$ cuyas filas y columnas son los subconjuntos de $[n]$ con k elementos, y cuya entrada I, J es $\Delta_{I,J}$, el menor (I, J) de A. Los valores propios de $\wedge^k A$ son los $\binom{n}{k}$ productos de los n valores propios, k a la vez. (Incluimos multiplicidad.)

Demostración: Veamos primero el caso de una matriz totalmente positiva. Sea A una matriz totalmente positiva cuyos valores propios son $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, con

$$|\lambda_1| \geq \cdots \geq |\lambda_n|.$$

Las entradas de A, menores 1×1, son positivos. Entonces el Teorema de Perron-Frobenius (Vea [20, p.189].) nos dice que λ_1 es el único valor propio de máximo valor absoluto, y que λ_1 es positivo. Aplicando el Teorema de Perron-Frobenius a

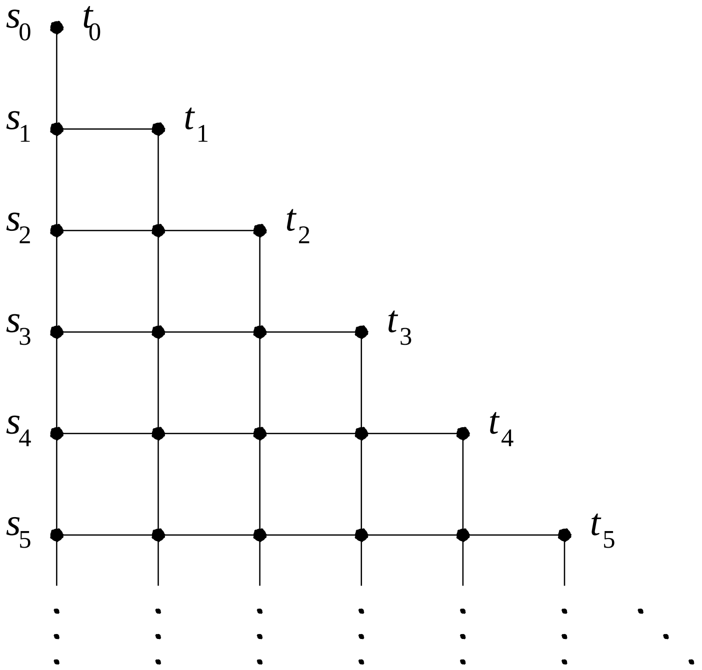


FIGURA 2.6. La red plana que corresponde a la matriz infinita de coeficientes binomios.

$\wedge^2 A, \wedge^3 A, \ldots, \wedge^n A$, vemos que cada matriz tiene un único valor propio de valor absoluto máximo. Estos valores propios son $\lambda_1\lambda_2, \lambda_1\lambda_2\lambda_3, \ldots, \lambda_1 \cdots \lambda_n$, respectivamente. Dado que cada valor propio es positivo, vemos entonces que los números $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ también son positivos.

Ahora supongamos que A es totalmente no negativa. Un resultado bien conocido dice que A es el límite de una sucesión de matrices totalmente positivas. (Vea [2, Tm. 2.7] o [10, Tm. 11].) Dado que los valores propios de estas matrices convergen a los valores propios de A, éstos tienen que ser reales y no negativos. $\square$

Veremos en la Sección 3 que existen matrices *infinitas* que son totalmente no negativas y que son importantes. Aunque no esté claro que podamos generalizar el Teorema 2.3 al caso infinito, podemos generalizar el Teorema 2.2. Por ejemplo la matriz $D = [d_{ij}]$ definida como

$$d_{ij} = \begin{cases} \binom{i}{j} & \text{si } j \leq i, \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

es totalmente no negativa y es la matriz de caminos de la red plana infinita en la Figura 2.6 [14]. (Las aristas tienen orientación hacia la derecha y hacia arriba.)

3. Funciones simétricas

En varias situaciones donde se usan matrices totalmente no negativas también se usan *funciones simétricas*. Un polinomio $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ recibe el nombre *función simétrica* si satisface

$$f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_i, x_{i+2}, \ldots, x_n) = f(x)$$

para $i = 1, \ldots, n-1$. En otras palabras, el polinomio $f(x)$ es una función simétrica si podemos intercambiar dos variables sin cambiar el polinomio. (Por más información, vea [22, Cap. 1], [25, Cap. 4], [33, Cap. 7].) Note que nuestra terminología es un poco engañosa: una expresión como $\sqrt{x_1 x_2}$ que no es un polinomio no recibe el nombre de *función simétrica* aunque sea una función con la propiedad de simetría.

Unos ejemplos sencillos de funciones simétricas son las *funciones elementales*,

$$\begin{aligned}
e_1(x) &= x_1 + x_2 + \cdots = \sum_i^n x_i, \\
e_2(x) &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + \cdots = \sum_i^{n-1} \sum_{j=i+1}^n x_i x_j, \\
&\vdots \\
e_n(x) &= x_1 \cdots x_n, \\
e_{n+1}(x) &= 0, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

las *funciones homogéneas (completas)*,

$$\begin{aligned}
h_1(x) &= x_1 + x_2 + \cdots = \sum_i^n x_i, \\
h_2(x) &= x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_3^2 + \cdots = \sum_i^n \sum_{j=i}^n x_i x_j, \\
&\vdots \\
h_m(x) &= \sum_{1 \leq i_1 \leq \cdots i_m \leq n} x_{i_1} \cdots x_{i_m}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

y las *funciones de sumas de potencias*,

$$
\begin{aligned}
p_1(x) &= x_1 + x_2 + \cdots = \sum_i^n x_i, \\
p_2(x) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots = \sum_i^n x_i^2, \\
&\vdots \\
p_m(x) &= \sum_1^n x_i^m, \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Note que el nombre *función homogénea* también es engañoso: todas las funciones arriba son polinomios homogéneos. A veces conviene utilizar un vector infinito de variables, $x = (x_1, x_2, \dots)$. Así, no tenemos la identidad $e_m(x) = 0$ para ningún valor de m.

Cualquier función simétrica $f(x)$ se puede expresar como una combinación lineal de productos de funciones elementales, o de funciones homogéneas, o de funciones de sumas de potencias. Esta expresión siempre es única. (Equivalentemente, estas clases de funciones forman tres bases para el anillo de funciones simétricas, visto como un espacio vectorial.) Si f tiene coeficientes enteros, entonces cuando escribimos f como una combinación lineal de productos de funciones elementales o de funciones homogéneas, los coeficientes que obtenemos son números enteros. Por otra parte, si escribimos f como una combinación lineal de productos de sumas de potencias, los coeficientes que obtenemos son números racionales. Por ejemplo tenemos que

$$
\begin{aligned}
e_4 &= -h_4 + 2h_3h_1 + h_2^2 - 3h_2h_1^2 + h_1^4, \\
&= -\frac{1}{4}p_4 + \frac{1}{3}p_3p_1 + \frac{1}{8}p_2^2 - \frac{1}{4}p_2p_1^2 + \frac{1}{24}p_1^4,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h_4 &= -e_4 + 2e_3e_1 + e_2^2 - 3e_2e_1^2 + e_1^4, \\
&= \frac{1}{4}p_4 + \frac{1}{3}p_3p_1 + \frac{1}{8}p_2^2 + \frac{1}{4}p_2p_1^2 + \frac{1}{24}p_1^4,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_4 &= -4e_4 + 4e_3e_1 + 2e_2^2 - 4e_2e_1^2 + e_1^4, \\
&= 4h_4 - 4h_3h_1 - 2h_2^2 + 4h_2h_1^2 - h_1^4.
\end{aligned}
$$

Cada clase de funciones de las antes mencionadas tiene asociada una matriz totalmente no negativa. A la clase de las funciones elementales le asociamos la matriz de

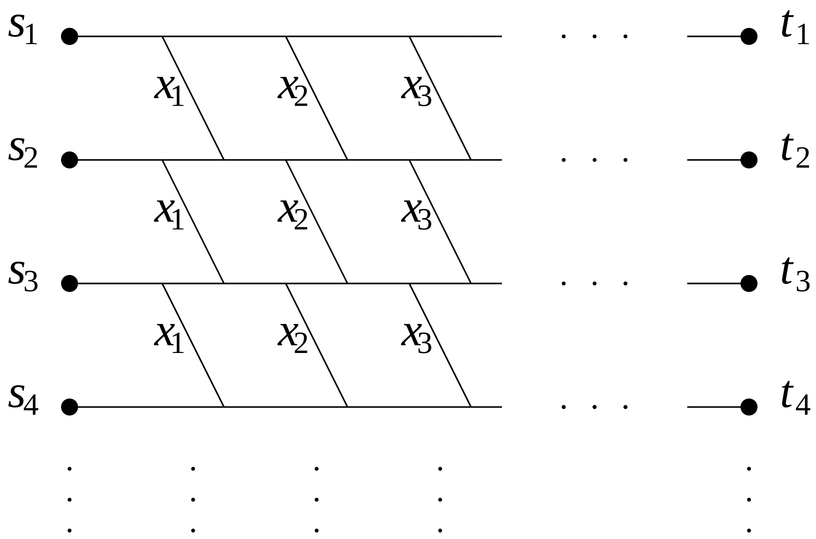


FIGURA 3.1. La red plana para las funciones simétricas elementales.

Toeplitz infinita

$$E = \begin{bmatrix} 1 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & \dots \\ 0 & 1 & e_1 & e_2 & e_3 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & e_1 & e_2 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & e_1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}. \tag{3.1}$$

(Una matriz $A = [a_{ij}]$ recibe el nombre de *Toeplitz* si satisface $a_{i,j} = a_{i+k,j+k}$ para cada $k \geq 1$.) Esta matriz es totalmente no negativa en el sentido de que cada menor es una función simétrica con coeficientes positivos. Una tal función es denominada *monomio-positiva*. Si el vector de variables $x = (x_1, \dots, x_n)$ es finito, entonces la evaluación de E en n números no negativos resulta en una matriz totalmente no negativa en el sentido corriente. Esta matriz es la matriz de pesos de la red plana que aparece en la Figura 3.1.

A la clase de las funciones homogéneas, le asociamos la matriz de Toeplitz

$$H = \begin{bmatrix} 1 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & \dots \\ 0 & 1 & h_1 & h_2 & h_3 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & h_1 & h_2 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & h_1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

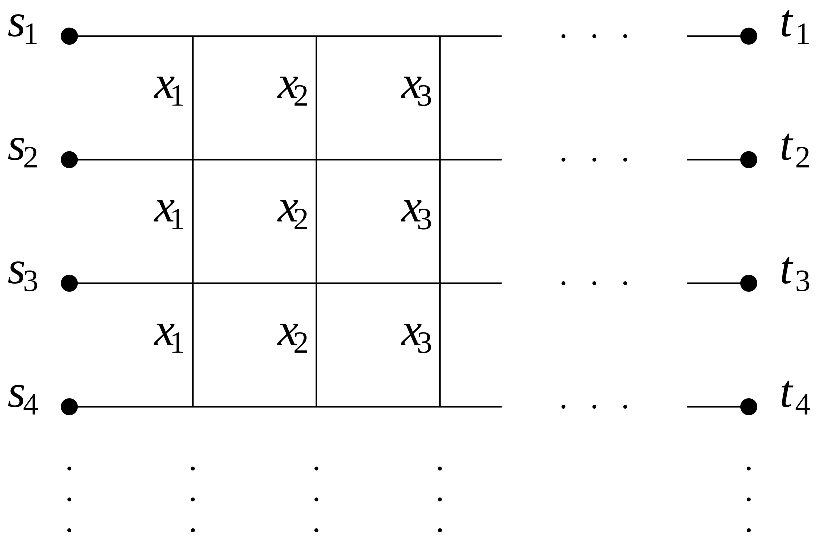


FIGURA 3.2. La red plana para las funciones simétricas homogéneas.

es totalmente no negativa, ya que es la matriz de pesos de la red plana que aparece en la Figura 3.2.

Para asociar una matriz totalmente no negativa a las funciones de sumas de potencias, necesitamos que el vector de variables $x = (x_1, \ldots, x_n)$ sea finito. La matriz de Hankel

$$P = \begin{bmatrix} n & p_1 & p_2 & \cdots & p_{n-1} \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_n \\ p_2 & p_3 & p_4 & \cdots & p_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n-1} & p_n & p_{n+1} & \cdots & p_{2n-2} \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

es totalmente no negativa para cualquier conjunto de valores no negativos $x_1, \ldots, x_n$. (Una matriz $A = [a_{ij}]$ recibe el nombre de *Hankel* si satisface $a_{i,j} = a_{i+k,j-k}$ por $k = 1, \ldots, j-1$. Vea [11, Cap. 10]) La matriz P es igual al producto de una matriz de Vandermonde con su transpuesta. $P = VV^T$, donde

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}. \tag{3.4}$$

Si reemplazamos los variables por números reales que satisfacen

$$0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n, \tag{3.5}$$

se puede mostrar por inducción que V es totalmente no negativa. (Vea por ejemplo [12, p. 99].) Concluimos entonces que la matriz P también es totalmente no negativa.

Cuando las desigualdades (3.5) son estrictas, entonces la inducción anterior muestra que V y P son totalmente *positivas*. En este caso es fácil factorizar V para construir una red plana. Ilustraremos eso por el caso $n = 4$. Tenemos que

$$V = L_1 L_2 L_3 D U_3 U_2 U_1,$$

donde

$$L_1L_2L_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x_3-x_2}{x_2-x_1} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{x_4-x_3}{x_2-x_1} & \frac{x_4-x_3}{x_3-x_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(x_4-x_3)(x_4-x_2)}{(x_3-x_2)(x_3-x_1)} & 1 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2-x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (x_3-x_2)(x_3-x_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (x_4-x_3)(x_4-x_2)(x_4-x_1) \end{bmatrix},$$

$$U_3U_2U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_2 & x_2^2 \\ 0 & 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 0 & 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Concatenando las redes planas correspondientes, construimos a la red plana en la Figura 3.3.

Las tres matrices totalmente no negativas (3.1), (3.2), (3.3) tienen aplicaciones en el problema de localizar a los ceros de un polinomio. (El número α es denominado un *cero* del polinomio $a(z)$ si tenemos que $a(\alpha) = 0$.)

En los teoremas siguientes, factorizaremos un polinomio $a(z) = 1 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ como

$$a(z) = \prod_{i=1}^{n} (1 + \beta_i z). \tag{3.6}$$

Los números $\beta_1, \ldots, \beta_n$ son los inversos aditivos de los recíprocos de los ceros de $a(z)$. Entonces, ellos son reales si y solamente si los ceros de $a(z)$ son reales.

El resultado siguiente es un caso especial de un teorema de Aissen, Schoenberg, y (Anne) Whitney [1].

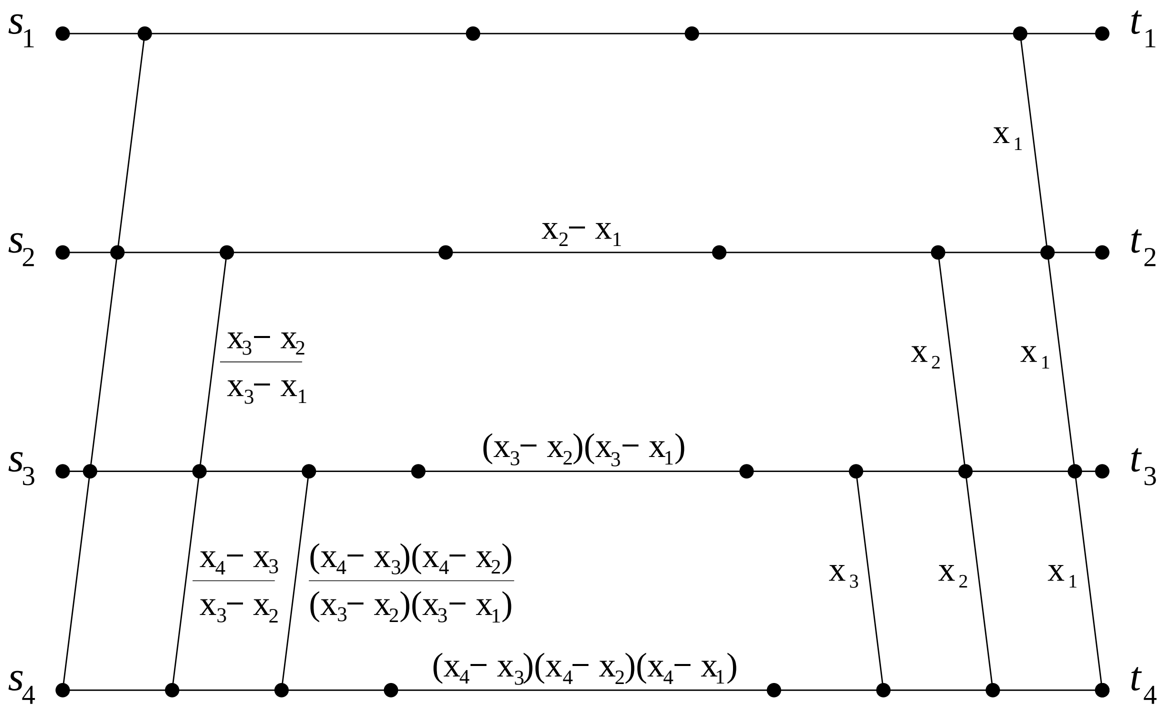


Figura 3.3. Una red plana para la matriz de Vandermonde.

Teorema 3.1. *Sea $a(z) = 1 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ un polinomio con coeficientes positivos. Los ceros de $a(z)$ son reales si y solamente si la matriz de Toeplitz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & a_1 & a_2 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

es totalmente no negativa, donde definimos $a_k = 0$ para $k > n$.

Es inmediato que se puede reemplazar a la matriz A por su transpuesta en el teorema anterior.

Note que cada coeficiente a_i es igual a la función elemental $e_i(\beta_1, \dots, \beta_n)$. Entonces la Figura 3.1 nos da una red plana cuya matriz de pesos es A. Por otra parte, esta red plana no nos sirve para mostrar que los ceros de $a(z)$ son reales, ya que necesitamos saber cuales son los ceros para dibujar la red. Afortunadamente en algunos casos podemos construir una red plana para la matriz A sin saber cuáles son los ceros de

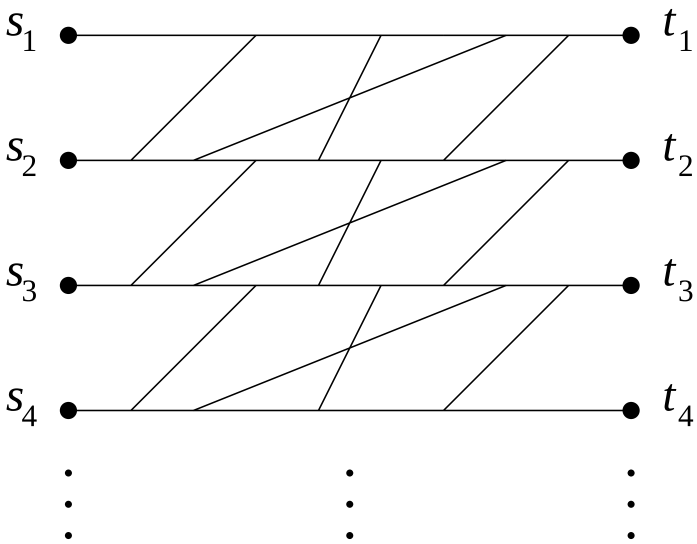


FIGURA 3.4. Una demostración que el polinomio $1+6z+5z^2+z^3$ tiene todos los ceros reales.

$a(z)$. Por ejemplo, la Figura 3.4 muestra una red plana sin pesos que demuestra que el polinomio $1+6z+5z^2+z^3$ tiene todos los ceros reales (sin usar los valores de ellos).

La dificultad con este método es que tenemos que adivinar la forma de la red plana. Encima, no se sabe si existe una tal red plana sin pesos ni siquiera en el caso en que el polinomio tenga todos sus coeficientes enteros.

Pregunta 3.1. *Sea $a(z)$ un polinomio en $\mathbb{N}[z]$ con todos los ceros reales. ?'Cuándo y cómo es posible construir una red plana sin pesos para mostrar que $a(z)$ tiene todos los ceros reales?*

No está claro que podamos multiplicar el polinomio $a(z)$ por un entero k para poder responder a la Pregunta 3.1, como sugiere la Observación 2.4. Equivalentemente, no se sabe si existe una red plana con pesos *racionales* para mostrar que $a(z)$ tiene todos los ceros reales. El único teorema de factorización de matrices infinitas de Toeplitz que son totalmente no negativas emplea números *reales* [1].

Pregunta 3.2. *Sea $a(z)$ un polinomio en $\mathbb{N}[z]$ con todos los ceros reales. ¿Cuándo y cómo es posible construir una red plana con pesos racionales para mostrar que $a(z)$ tiene todos los ceros reales?*

De manera similar al Teorema 3.1, el siguiente teorema emplea a las funciones de sumas de potencias para demostrar que un polinomio tiene todos sus ceros reales. Este teorema es una consecuencia de un resultado de Gantmacher [12, Cor. de Tm. 6, p. 203], en combinación con la positividad total de la matriz de Vandermonde (3.4). (Vea también [Tm. 6.5][27].)

Teorema 3.2. *Sea $a(z) = 1+a_1z+\cdots+a_nz^n$ un polinomio con coeficientes positivos. Todos los ceros de $a(z)$ son reales y distintos si y solamente si la matriz de Hankel P de (3.3) es totalmente positiva, donde p_i es la suma de potencias $\beta_1^i + \cdots + \beta_n^i$, y $\beta_1, \ldots, \beta_n$ son los números que aparecen en la factorización (3.6).*

Sin saber cuáles son los valores de $\beta_1, \ldots, \beta_n$, podemos calcular la sumas de potencias utilizando solamente los coeficientes $a_1, \ldots, a_n$, que como ya hemos observado son las funciones simétricas elementales evaluadas en $\beta_1, \ldots, \beta_n$. Otra vez es concebible que podamos construir una red plana sin pesos para mostrar que $a(z)$ tiene todos los ceros reales. Desafortunadamente no se sabe un método general para realizar esta construcción, aunque la matriz P tiene entradas enteras y la forma especial de Hankel.

Pregunta 3.3. *Sea A una matriz totalmente no negativa con entradas enteras. ¿Cuándo y cómo es posible realizar A como la matriz de caminos de una red plana sin pesos? ¿Cómo se puede encontrar el menor entero k de modo que kA sea realizable así? ¿Es más fácil el caso especial de matrices de Hankel?*

El resultado de Gantmacher [12, Cor. de Tm. 6, p. 203], se puede modificar para aplicarse a los polinomios con ceros repetidos [12, Cap. 15, Sec. 11]. Sería interesante modificar el Teorema 3.2 también.

Pregunta 3.4. *Sea $a(z) = 1+a_1z+\cdots+a_nz^n$ un polinomio con coeficientes positivos. ¿Es cierto que todos los ceros de $a(z)$ son reales (y no necesariamente distintos) si y solamente si la matriz de Hankel P (3.3) es totalmente no negativa?*

4. Polinomios totalmente no negativos

El determinante de una matriz $n \times n$ es un polinomio en n^2 variables $x = (x_{11}, \ldots, x_{nn})$,

$$\det(x) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) x_{1,\sigma(1)} \cdots x_{n,\sigma(n)}$$

que se puede evaluar en una matriz $A = [a_{ij}]$ usando la sustitución $x_{ij} = a_{ij}$. Según la definición de las matrices totalmente no negativas, la evaluación de este polinomio en una matriz totalmente no negativa resulta siempre en un número no negativo. Un polinomio con esta propiedad se denomina *totalmente no negativo.* Los polinomios totalmente no negativos aparecen en la investigación de Lusztig [21], que mostró que todos los elementos de la base canónica del anillo de coordenadas de GL_n son polinomios totalmente no negativos. Para comprender mejor esta base, que todavía no tiene una descripción sencilla, quizás uno podría esperar caracterizar todos los polinomios totalmente no negativos, o por lo menos un subconjunto de ellos.

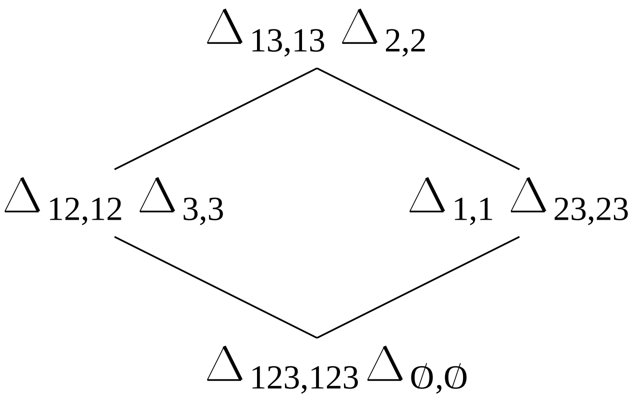


FIGURA 4.1. Un órden parcial sobre los productos de menores principales de matrices 3×3 totalmente no negativas.

Fallat y sus colaboradores descubrieron un subconjunto de los polinomios totalmente no negativos que se puede U se puede describir en términos de menores principales. Un ejemplo es el polinomio

$$\Delta_{\{1,3\}\{1,3\}}\Delta_{\{2\}\{2\}} - \Delta_{\{1\}\{1\}}\Delta_{\{2,3\}\{2,3\}}. \tag{4.1}$$

Equivalentemente todas las matrices totalmente no negativas de tamaño por lo menos 3×3 satisfacen la desigualdad

$$\Delta_{\{1\}\{1\}}\Delta_{\{2,3\}\{2,3\}} \leq \Delta_{\{1,3\}\{1,3\}}\Delta_{\{2\}\{2\}}. \tag{4.2}$$

Esta desigualdad y cuatro parecidas se muestran en la Figura 4.1 en la forma de un conjunto parcialmente ordenado. (Interpretamos el menor vacío $\Delta_{\emptyset,\emptyset}$ como 1.)

Los Teoremas 2.1 y 2.3 proveen métodos para demostrar que los productos

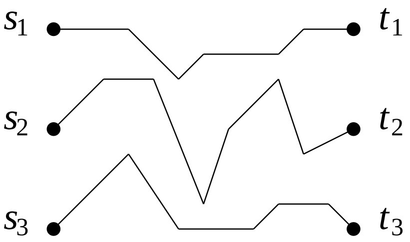
$$\Delta_{13,13}\Delta_{2,2}, \quad \Delta_{12,12}\Delta_{3,3}, \quad \Delta_{1,1}\Delta_{23,23}, \quad \Delta_{123,123}\Delta_{\emptyset,\emptyset} \tag{4.3}$$

de menores de matrices totalmente no negativas están relacionados como indica la Figura 4.1. En particular, tenemos el siguiente corolario.

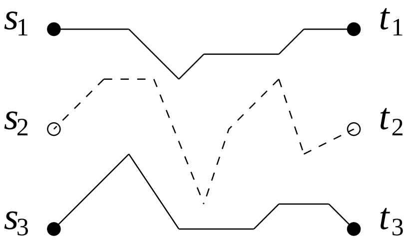
Corolario 4.1. *Sea A una matriz $n \times n$ totalmente no negativa, y sea G una red plana cuya matriz de caminos es A. Sea I un subconjunto de $[n]$ y sea $\overline{I} = [n] \smallsetminus I$ su complemento en $[n]$. Entonces el producto $\Delta_{I,I}\Delta_{\overline{I},\overline{I}}$ de menores de A es igual a la suma de pesos de familias $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ de caminos en G con las siguientes características.*

(1) En cada camino, el índice de la fuente es igual al índice del término.
(2) Los caminos con índices en I no se intersectan entre ellos, y los caminos con índices en $\overline{I}$ no se intersectan entre ellos.

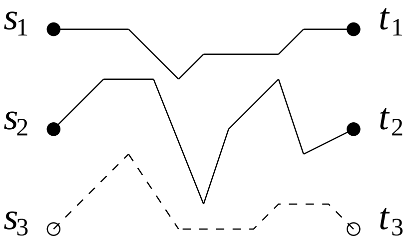
Imaginando que las fuentes y los términos con índices I son de un color y que las fuentes y los términos con índices $\overline{I}$ son de otro color, podemos interpretar el producto



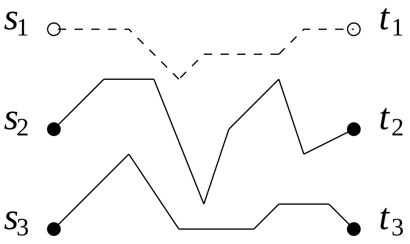
(a) Contado en $\Delta_{123,123}\Delta_{\emptyset,\emptyset}$.



(b) Contado en $\Delta_{13,13}\Delta_{2,2}$.



(c) Contado en $\Delta_{12,12}\Delta_{3,3}$.



(d) Contado en $\Delta_{1,1}\Delta_{23,23}$.

FIGURA 4.2. Coloraciones de una familia de tres caminos.

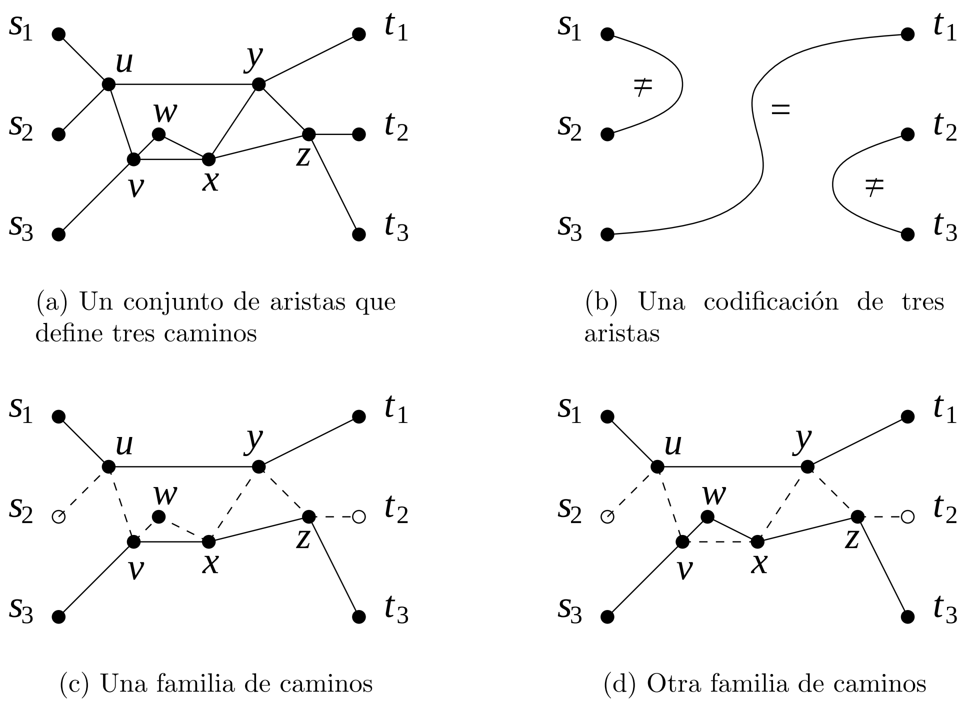
$\Delta_{I,I}\Delta_{\overline{I},\overline{I}}$ como el número de familias de caminos en las cuales cada camino tiene uno de dos colores y dos caminos del mismo color no se pueden intersectar.

Ahora consideremos los conjuntos de aristas que son contados por un producto $\Delta_{I,I}\Delta_{\overline{I},\overline{I}}$ pero no por otro. La Figura 4.2(a) muestra un conjunto de aristas que define una familia de caminos sin intersección. Este conjunto de aristas es contado por todos los cuatro productos (4.3), como se ve facilmente en las Figuras 4.2(a), 4.2(b), 4.2(c), y 4.2(d).

Por otra parte, el conjunto de aristas en la Figura 4.3(a) no es contado por todos los cuatro productos (4.3). Para que este conjunto de aristas determine una familia 2-coloreable de caminos, las aristas (s_1, u) y (s_2, u) necesitan tener colores distintos, porque se intersectan en u. Entonces s_1 y s_2 tienen colores distintos. Por la misma razón t_2 y t_3 tienen colores distintos. Mirando las demás aristas, vemos que las aristas en la sucesión

$$(s_3, v), (u, v), (u, y), (x, y), (x, z), (y, z), (z, t_1)$$

necesitan alternar de color. Entonces s_3 y t_1 tienen el mismo color. La Figura 4.3(b) muestra esta igualdad y las dos desigualdades.



(a) Un conjunto de aristas que define tres caminos

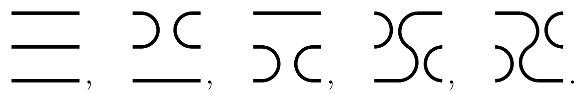
(b) Una codificación de tres aristas

(c) Una familia de caminos

(d) Otra familia de caminos

Figura 4.3. Familias de caminos.

No es difícil mostrar que un conjunto de aristas que corresponde a una familia 2-coloreable de tres caminos pertenece siempre a una de las cinco categorías siguientes [28, Sec. 2],



Estos cinco diagramas señalan parejas de fuentes o de términos que nesecitan tener distintos colores y parejas de una fuente y un término que necesitan tener el mismo color.

(Tal vez al lector le puede interesar que los cinco diagramas son una base del álgebra de *Temperley-Lieb* T_3, si definimos el producto de dos diagramas como su concatenación. En general formamos el álgebra de Temperley-Lieb T_n con los $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ diagramas análogos en $2n$ vértices. El *número de Catalán* $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ aparece mucho en la combinatoria algebraica. Vea por ejemplo la Sección 11 y [33, pp. 219-231].)

Entonces, para comparar productos de la forma $\Delta_{I,I}\Delta_{\overline{I},\overline{I}}$ en matrices totalmente no negativas 3×3, podemos usar subconjuntos del base del álgebra de Temperley-Lieb T_3. Para cada producto $\Delta_{I,I}\Delta_{\overline{I},\overline{I}}$, hacemos lo siguiente.

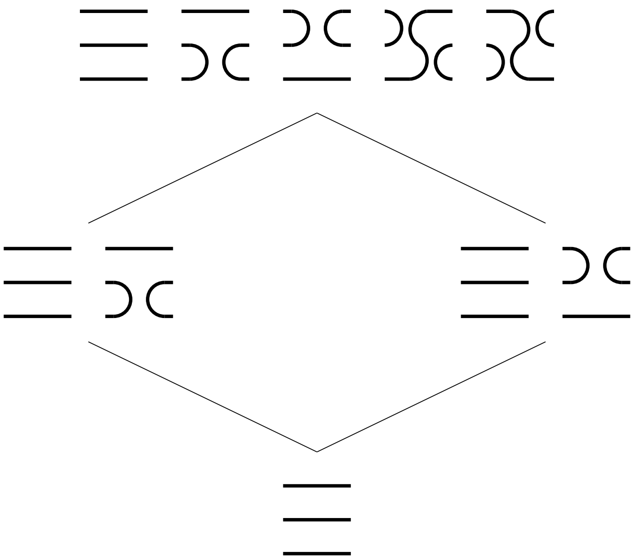


FIGURA 4.4. Un poset de ciertos subconjuntos de T_3.

(1) Dibujamos dos columnas de n vértices. Llamamos a los vértices a la izquierda *fuentes* y a los vértices a la derecha *términos*. (Los denotamos $s_1, \ldots, s_n$ y $t_1, \ldots, t_n$ como siempre.)
(2) Para $i = 1, \ldots, n$, coloreamos s_i y t_i rojos si $i \in I$ y azules si $i \in \overline{I}$.
(3) Apuntamos los elementos del álgebra de Temperley-Lieb T_n que conectan solamente las parejas siguentes.
   (a) dos fuentes de colores distintos.
   (b) dos términos de colores distintos.
   (c) una fuente y un término del mismo color.

Ordenando estos subconjuntos por inclusión, obtenemos todas las desigualdades de la forma

$$\Delta_{I,I}\Delta_{\overline{I},\overline{I}} \leq \Delta_{J,J}\Delta_{\overline{J},\overline{J}}. \tag{4.4}$$

La Figura 4.4 muestra otra vez el poset de la Figura 4.1, ahora con productos de menores reemplazados por subconjuntos de T_3.

Hace poco se descubrió un criterio más sencillo para comparar productos de menores de matrices totalmente no negativas [29].

(1) Dibujamos un camino de n pasos de longitud uno, de modo que el paso i tiene pendiente 1 si $i \in I$ y pendiente -1 si $i \in \overline{I}$.
(2) Definimos una partición del conjunto $[n]$ de modo que cada bloque consista de todos los pasos que estén a la misma altura.

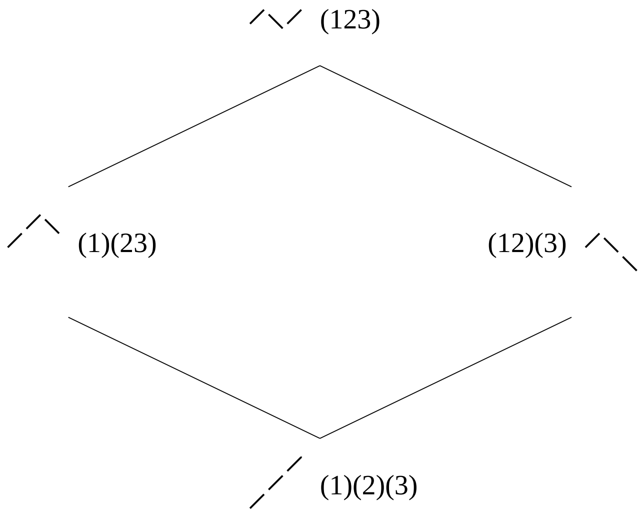


FIGURA 4.5. Un poset de ciertos caminos de tres pasos.

Ordenando estas particiones de $[n]$ por refinamiento, obtenemos otra vez todas las desigualdades de la forma (4.4). La Figura 4.5 muestra otra vez el poset de la Figura 4.1, ahora con productos de menores reemplazados por caminos.

Hasta ahora hemos caracterizado todos los polinomios totalmente no negativos de la forma

$$\Delta_{J,J}\Delta_{\overline{J},\overline{J}} - \Delta_{I,I}\Delta_{\overline{I},\overline{I}}$$

y estos resultados se pueden generalizar para obtener una caracterizacion [6], [28] de todos los polinomios totalmente no negativos de la forma

$$\Delta_{J,J'}\Delta_{L,L'} - \Delta_{I,I'}\Delta_{K,K'}.$$

Sería interesante tener una caracterización de polinomios totalmente no negativos más generales.

Pregunta 4.1. *¿Cómo podemos construir un poset de productos de tres o más menores de matrices totalmente no negativas?*

Pregunta 4.2. *¿Existe una caracterización sencilla de todos los polinomios totalmente no negativos?*

5. Funciones de Schur

En la Sección 3 hemos considerado la matriz totalmente no negativa

$$H = \begin{bmatrix} 1 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & \dots \\ 0 & 1 & h_1 & h_2 & h_3 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & h_1 & h_2 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & h_1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Esta matriz, sus submatrices y sus menores son importantes en la teoría de las representaciones y en la geometría algebraica. H se llama la *matriz infinita de Jacobi-Trudi*, y sus submatrices también se llaman *matrices de Jacobi-Trudi*. Cada menor de H es una función simétrica, ya que el conjunto de funciones simétricas es un anillo. Los menores de H que corresponden a conjuntos *consecutivos* de columnas se denominan *funciones de Schur*.

Note que una función de Schur no tiene un nombre único según nuestra notación $\Delta_{I,I'}$. Por ejemplo tenemos que

$$\det \begin{bmatrix} h_2 & h_3 & h_4 \\ 1 & h_1 & h_2 \\ 0 & 1 & h_1 \end{bmatrix} = \Delta_{134,345} = \Delta_{245,456} = \Delta_{356,567} = \cdots$$

Por costumbre, denotamos a cada función de Schur usando los índices en la diagonal de la submatriz correspondiente de H. Por ejemplo, la función de Schur del ejemplo anterior es s_{211}. Los índices de una función de Schur siempre forman una sucesión decreciente (no necesariamente estrictamente), que también se llama una *partición*. Una partición se suele escribir como

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r).$$

Los números $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ se llaman las *partes* de λ. Decimos que λ es una *partición de* n si tenemos que

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_r = n.$$

En este caso también escribimos $\lambda \vdash n$, o $|\lambda| = n$.

Recordando que H es la matriz de pesos de la red plana en la Figura 3.2, podemos interpretar cada función de Schur como una suma de pesos de caminos en ese grafo. Entonces está claro que la expansión de una función de Schur en términos de los variables $x_1, \dots$ no tiene resta.

Observación 5.1. *Cada función de Schur es monomio-positiva.*

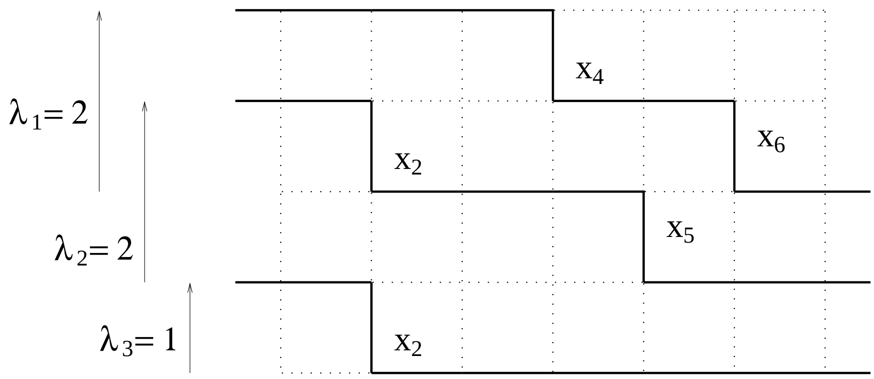


FIGURA 5.1. Una familia de caminos que contribuye $x_2^2x_4x_5x_6$ a la función s_{221}.

La Figura 5.1 muestra una familia de caminos que contribuye con un peso de $x_2^2x_4x_5x_6$ a la función s_{221}.

En analogía con las funciones elementales, homogéneas, y de sumas de potencias, las funciones de Schur forman una base del anillo de funciones simétricas, visto como un espacio vectorial. Es decir, cualquier función simétrica $f(x)$ se puede expresar de manera única como una combinación lineal de funciones de Schur. De hecho, si f tiene coeficientes enteros, la combinación lineal también tendrá coeficientes enteros. Por ejemplo tenemos que

$$\begin{aligned} e_4 &= s_{1111}, \\ h_4 &= s_4, \\ p_4 &= s_4 - s_{31} + s_{22} - s_{211}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Notemos que aunque la función p_4 es monomio-positiva, no es Schur-positiva. Es decir, su expansión en términos de funciones de Schur no tiene coeficientes positivos.

Una propiedad interesante de las funciones de Schur es que un producto de ellas siempre es Schur-positivo. La expansión (única) de un producto tal en términos de funciones de Schur es una combinación lineal *positiva* de ellas. Dadas dos particiones λ, μ, podemos escribir

$$s_\lambda s_\mu = \sum_{\nu \vdash |\lambda|+|\mu|} c_{\lambda\mu}^{\nu} s_\nu. \tag{5.2}$$

Los coeficientes $c_{\lambda\mu}^{\nu}$ se llaman los *coeficientes de Littlewood-Richardson.* Por ejemplo tenemos que

$$s_{31}s_{21} = s_{52} + s_{511} + s_{43} + 2s_{421} + s_{4111} + s_{331} + s_{322} + s_{3211}. \tag{5.3}$$

Para obtener esta expresión, podríamos en principio calcular los determinantes s_{31}, s_{21}, multiplicarlos, y reconocer la expresión que resulta como una combinación lineal de varios otros determinantes. Afortunadamente, existen métodos menos fastidiosos para calcular la expansión Schur de un producto $s_\lambda s_\mu$. Todos estos métodos suelen llamarse *el método de Littlewood-Richardson*, aunque sean diferentes.

En la presentación de un método de Littlewood-Richardson, vamos a representar λ y μ como diagramas de cuadrados que se llaman *diagramas de Young*. Rellenamos los cuadrados del diagrama de μ con números, creando una tabla que se llama un *tableau de Young*. Un tableau de Young se llama *semiestándar* si los números crecen (no necesariamente estrictamente) en las filas y en las columnas. Un tableau semiestándar de Young de forma μ se llama *estándar* si los números usados son $1, \dots, |\mu|$.

Definimos el *contenido* de un tableau de Young T como el vector

$$c(T) = (\#1\text{s en } T, \#2\text{s en } T, \dots)$$

Por ejemplo, un tableau semiestándar de Young de forma $(4,3,1,1)$ y contenido $(2,2,3,1,1)$ es el siguiente,

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&1&2&3\\\hline 2&3&3\\\cline{1-3} 4\\\cline{1-1} 5\\\cline{1-1}\end{array}\ . \tag{5.4}$$

Si T es un tableau de Young de forma μ, escribiremos T_j para denotar el tableau que consiste solamente de las columnas j hasta μ_1 de T. Entonces si T es el tableau semiestándar de Young en (5.4), tenemos que

$$\begin{aligned} c(T_1) &= (2,2,3,1,1),\\ c(T_2) &= (1,1,3,0,0),\\ c(T_3) &= (0,1,2,0,0),\\ c(T_4) &= (0,0,1,0,0). \end{aligned}$$

Nuestro método de Littlewood-Richardson para multiplicar $s_\lambda s_\mu$ es el siguiente.

(1) Dibujamos λ y μ como diagramas de Young.
(2) Apunte todos los tableaux semiestándar de Young T de forma μ tales que, para $j = 1, \dots, \mu_1$, tenemos que $\lambda + c(T_j)$ es una partición de un entero.
(3) Sumamos $s_{\lambda + c(T)}$ sobre todos los tableaux T en la lista.

Veamos por ejemplo la multiplicación de $s_{31}s_{21}$. Se puede confirmar que los tableaux semiestándar de Young de la forma $(2,1)$ para los cuales $(3,1)+c(T)$ y $(3,1)+c(T_2)$ son particiones de enteros son los siguientes:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\,,\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\,,\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\,,\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\,,\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\,,\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 4\\\cline{1-1}\end{array}\,,\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\,,\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\,,\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2&3\\\hline 4\\\cline{1-1}\end{array}\,.$$

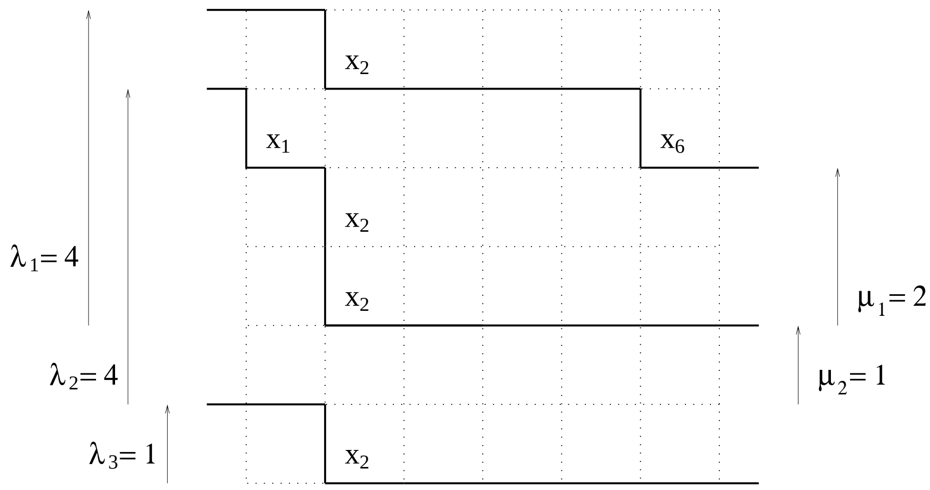


FIGURA 5.2. Una familia de caminos que contribuye $x_1x_2^4x_6$ a la función sezgada de Schur $s_{441/21}$.

Entonces las particiones $(3,1)+c(T)$ son

$$(5,2) \quad (5,1,1) \quad (4,3) \quad (4,2,1) \quad (4,2,1)$$
$$(4,1,1,1) \quad (3,3,1) \quad (3,2,2) \quad (3,2,1,1).$$

Así obtenemos la expresión de la Ecuación (5.3).

Una generalización de las funciones de Schur son los menores de la matriz H que corresponden a conjuntos de columnas *no* necesariamente consecutivas. Estas funciones se llaman *funciones sezgadas de Schur* y se describen usando una *pareja* de particiones: $s_{\lambda/\mu}$. La primera partición determina un menor $k \times k$ de columnas consecutivas, y la segunda partición mueve la primera columna μ_1 posiciones a la izquierda, la segunda columna μ_2 posiciones a la izquierda, etc. Por ejemplo podemos ver en la submatriz

$$\begin{bmatrix} h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & h_6 \\ h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & h_1 \end{bmatrix},$$

que las funciones s_{441} y $s_{441/21}$ son

$$s_{441} = \det \begin{bmatrix} h_4 & h_5 & h_6 \\ h_3 & h_4 & h_5 \\ 0 & 1 & h_1 \end{bmatrix}, \qquad s_{441/21} = \det \begin{bmatrix} h_2 & h_4 & h_6 \\ h_1 & h_3 & h_5 \\ 0 & 0 & h_1 \end{bmatrix}.$$

La Figura 5.2 muestra una familia de caminos que contribuye con un peso de $x_1x_2^4x_6$ a la función sezgada de Schur $s_{441/21}$.

Entonces está claro que la expansión de una función sezgada de Schur en términos de las variables $x_1, \ldots$ no tiene resta.

Observación 5.2. *Cada función sezgada de Schur es monomio-positiva.*

Una función sezgada de Schur no es solamente monomio-positiva, sino también Schur-positiva. Adenmás, los coeficientes positivos que aparecen en la expansión Schur de una función sezgada de Schur son los mismos coeficientes de Littlewood-Richardson que obtenemos en la multiplicación de funciones corrientes de Schur (5.2):

$$s_{\nu/\mu} = \sum_{\lambda \vdash |\nu|-|\mu|} c^{\nu}_{\lambda\mu} s_{\lambda}. \tag{5.5}$$

Análogo al método de Littlewood-Richardson para multiplicar funciones de Schur, es el *juego de taquín* que construye la expresión (5.5) dadas dos particiones μ, ν. Jugamos el juego de taquín en un tableau estándar de Young de la forma ν/μ. Es decir, dibujamos el diagrama de Young para ν, borramos las cajas que corresponden a μ, y rellenamos los cuadrados que quedan con los números $1, \ldots, |\nu| - |\mu|$ de modo que crezcan en la filas y en las columnas.

Es posible que el juego de taquín se explique mejor con figuras que con palabras. La Figura 5.3 muestra el juego en el tableau

		1	5
	2	3	
4	6		

de la forma sezgada $(4, 3, 2)/(2, 1)$.

En el juego de taquín, queremos trasformar un tableau T de forma sezgada ν/μ en un tableau corriente de $|\nu| - |\mu|$ cajas. Movemos cajas arriba y a la izquierda según las reglas siguientes.

Mientras la forma del tableau esté sezgada,
(1) Elijimos de la forma vacía cualquier cuadrado extremo en el sudeste. (En la Figura 5.3 lo hemos indicado con un punto.)
(2) Movemos a esta posición la caja a su derecha o debajo; de estas dos, escogemos la que tenga el menor número.
(3) Mientras el tableau no tenga forma ni corriente ni sezgada, movemos a la posición más recientemente desocupada la caja a su derecha o debajo que tenga el menor número.

Llamamos el tableau que resulta $jdt(T)$. Sorprendientemente, este tableau no depende de los cuadrados elegidos sucesivamente en la regla (1). En la expansión Schur de $s_{\nu/\mu}$ (5.5), el coeficiente de Littlewood-Richardson $c^{\nu}_{\lambda\mu}$ es igual al número de tableaux estándar de Young T de la forma ν/μ tales que $jdt(T)$ tiene la forma λ y es rellenado con los números $1, \ldots, |\lambda|$, en orden de leer (de arriba a abajo y de izquierda a derecha).

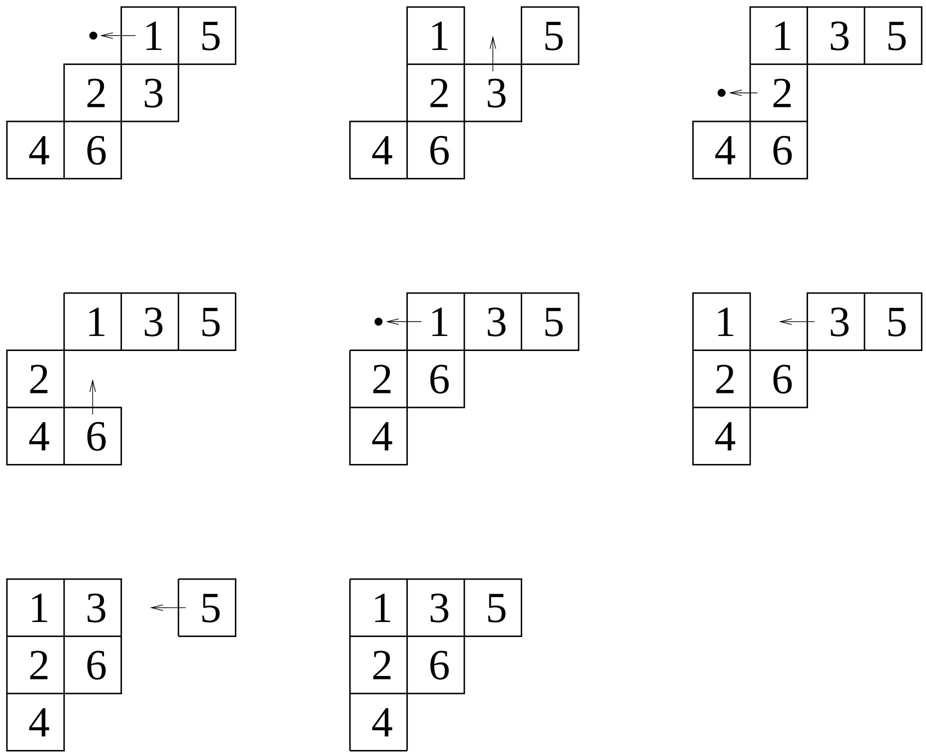


FIGURA 5.3. El juego de taquín.

Por ejemplo en el cálculo de la expansión Schur de $s_{321/21}$, jugamos el juego de taquín en cada uno de los seis tableaux estándar de Young de la forma $(3,2,1)/(2,1)$,

$$jdt\begin{pmatrix} & & 1 \\ & 2 & \\ 3 & & \end{pmatrix} = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}, \quad jdt\begin{pmatrix} & & 1 \\ & 3 & \\ 2 & & \end{pmatrix} = \begin{matrix} 13 \\ 2 \end{matrix}, \quad jdt\begin{pmatrix} & & 2 \\ & 1 & \\ 3 & & \end{pmatrix} = \begin{matrix} 12 \\ 3 \end{matrix},$$

$$jdt\begin{pmatrix} & & 2 \\ & 3 & \\ 1 & & \end{pmatrix} = \begin{matrix} 12 \\ 3 \end{matrix}, \quad jdt\begin{pmatrix} & & 3 \\ & 1 & \\ 2 & & \end{pmatrix} = \begin{matrix} 13 \\ 2 \end{matrix}, \quad jdt\begin{pmatrix} & & 3 \\ & 2 & \\ 1 & & \end{pmatrix} = 123.$$

Ignorando el segundo y el quinto tableaux, que no contienen los números $1, 2, 3$ en orden de leer, tenemos que

$$s_{321/21} = s_{111} + 2s_{21} + s_3.$$

Como ya hemos notado (5.1), no todas las funciones monomio-positivas son Schur-positivas. Las funciones Schur-positivas son interesantes porque corresponden a representaciones de S_n. (Vea la Sección 7.) Hay varios resultados y conjeturas que dicen que ciertas funciones simétricas son Schur-positivas. (Vea, por ejemplo [32], [34].)

Notemos que los resultados de la Sección 4 se pueden aplicar a las matrices de Jacobi-Trudi para definir funciones que son monomio-positivas. Por ejemplo, el polinomio totalmente no negativo $\Delta_{13,13}\Delta_{2,2} - \Delta_{12,12}\Delta_{3,3}$ nos da una clase infinita de diferencias de productos de funciones de Schur. Extrañamente, estos polinomios parecen ser siempre Schur-positivos. Por ejemplo, tenemos que

$$\begin{aligned}
s_{41/1}s_2 - s_{32}s_1 &= s_6 + 2s_{51} + s_{42} + s_{411}, \\
s_{52/1}s_3 - s_{43}s_2 &= s_{81} + 2s_{72} + s_{711} + s_{63} + 2s_{621} + s_{54} + s_{531} + s_{522}, \\
s_{63/1}s_4 - s_{54}s_3 &= s_{10,2} + 2s_{93} + s_{921} + s_{84} + s_{831} + s_{822} + s_{75} + s_{741} + 2s_{732} \\
&\quad + s_{66} + s_{651} + s_{642} + s_{633}, \\
&\ \ \vdots
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Varios casos especiales se han demostrado ya. Por ejemplo, podemos mostrar que todos las funciones simétricas de (5.6) son Schur-positivas.

Proposición 5.3. *Sea i un entero no negativo. Entonces la función simétrica*

$$s_{i+3,i/1}s_{i+1} - s_{i+2,i+1}s_i \tag{5.7}$$

es Schur-positiva.

Demostración: Usando el juego de taquín y dos interpretaciones de los coeficientes de Littlewood-Richardson (5.2), (5.5), se puede mostrar que tenemos que

$$s_{i+3,i/1} = s_{i+2,i} + s_{i+3,i-1}.$$

Entonces nuestra función simetrica (5.7) se puede escribir como

$$s_{i+2,i}s_{i+1} + s_{i+3,i-1}s_{i+1} - s_{i+2,i+1}s_i. \tag{5.8}$$

Ahora tenemos que mostrar que cualquier función de Schur que aparece en la expansion Schur de $s_{i+2,i+1}s_i$ también aparece en la expansión Schur de $s_{i+2,i}s_{i+1}$ o de $s_{i+3,i-1}s_{i+1}$. Supongamos que aplicamos el método de Littlewood-Richardson al producto $s_{i+2,i+1}s_i$, y consideramos una manera de rellenar el tableau de la forma i y añadir su contenido a la partición $(i+2, i+1)$. Sea la partición que resulta ν. Aplicando ahora el método de Littlewood-Richardson al producto $s_{i+2,i}s_{i+1}$, rellenamos un tableau de la forma $i+1$ con los mismos números que hemos usado para rellenar el tableau de la forma i, más un 2 adicional. Añadiendo el contenido de este tableau a la partición $(i+2, i)$, obtenemos otra vez la partición ν.

Ya que s_ν aparece en la expansión Schur de $s_{i+2,i}s_{i+1}$ con multiplicidad mayor que o igual a su multiplicidad en la expansión Schur de $s_{i+2,i+1}s_i$, sabemos que la función

$$s_{i+2,i}s_{i+1} - s_{i+2,i+1}s_i.$$

es Schur-positiva. Entonces la función (5.8) también es Schur-positiva. $\square$

Sería interesante demostrar que la generalización de la Proposición 5.3 también es cierta.

Conjetura 5.4. *Sea* $f = \Delta_{J,J}\Delta_{\overline{J},\overline{J}} - \Delta_{I,I}\Delta_{\overline{I},\overline{I}}$ *un polinomio totalmente no negativo, y sea* A *una matriz de Jacobi-Trudi. Entonces* $f(A)$ *es una función Schur-positiva.*

6

Utilizando los carácteres irreducibles, podemos definir para cada partición λ de n una función en n^2 variables $x = (x_{1,1}, \ldots, x_{n,n})$

$$\mathrm{Imm}_\lambda(x) = \sum_{\pi \in S_n} \chi^\lambda(\pi) x_{1,\pi(1)} \cdots x_{n,\pi(n)}$$

que se llama el λ-*imanante* de una matrix $n \times n$. Esta función es totalmente no negativa [35]. Además, su evaluación en cualquier matriz de Jacobi-Trudi siempre es una función Schur-positiva [15, Tm. 1.4].

7

8

9

10

11

12

13

14. AGRADECIMIENTOS

Los autores quiren agradecer a Carlos Montenegro, Sergey Fomin, John Stembridge, Richard Stanley, Brian Drake, Jason Asher,...

Referencias

[1] M. Aissen, I. J. Schoenberg, and A. Whitney. On generating functions of totally positive sequences. *J. Anal. Math.*, **2** (1952) pp. 93–103.
[2] T. Ando. Totally positive matrices. *Linear Algebra Appl.*, **90** (1987) pp. 165–219.
[3] F. Brenti. Combinatorics and total positivity. *J. Combin. Theory Ser. A*, **71** (1995) pp. 175–218.
[4] C. W. Cryer. Some properties of totally positive matrices. *Linear Algebra Appl.*, **15** (1976) pp. 1–25.

[5] E. Curtis, D. V. Ingerman, and J. Morrow. Circular planar graphs and resistor networks. *Linear Algebra Appl.*, **283** (1998) pp. 115–150.
[6] S. M. Fallat, M. I. Gekhtman, and C. R. Johnson. Multiplicative principal-minor inequalities for totally nonnegative matrices. *Adv. Appl. Math.*, (2002). To appear.
[7] S. Fomin. Loop-erased walks and total positivity. *Trans. Amer. Math. Soc..*, **353** (2001) pp. 3563–3583.
[8] S. Fomin and M. Shapiro. Stratified spaces formed by totally positive varieties. *Michigan Math. J.*, **48** (2000) pp. 253–270.
[9] S. Fomin and A. Zelevinsky. Double bruhat cells and total positivity. *J. Amer. Math. Soc.*, **12** (1999) pp. 335–380.
[10] S. Fomin and A. Zelevinsky. Total positivity: Tests and parametrizations. *Math. Intelligencer*, **22** (2000) pp. 23–33.
[11] F. R. Gantmacher. *The Theory of Matrices*, vol. 1. Chelsea, New York, 1959.
[12] F. R. Gantmacher. *The Theory of Matrices*, vol. 2. Chelsea, New York, 1959.
[13] F. R. Gantmacher and M. G. Krein. *Oscillation matrices and kernels and small vibrations of mechanical systems*. AMS Chelsea Publishing, Providence, 2002. Edited by A. Eremenko. Translation based on the 1941 Russian original.
[14] I. Gessel and G. Viennot. Binomial determinants, paths, and hook length formulae. *Advances in Math.*, **58** (1985) pp. 300–321.
[15] M. Haiman. Hecke algebra characters and immanant conjectures. *J. Amer. Math. Soc.*, **6** (1993) pp. 569–595.
[16] S. Karlin. *Mathematical methods and theory in games, programming, and economics*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1959.
[17] S. Karlin and G. McGregor. Coincidence probabilities. *Pacific J. Math.*, **9** (1959) pp. 1141–1164.
[18] B. Lindström. On the vector representations of induced matroids. *Bull. London Math. Soc.*, **5** (1973) pp. 85–90.
[19] C. Loewner. On totally positive matrices. *Math. Z.*, **63** (1955) pp. 338–340.
[20] D. Luenberger. *Introduction to Dynamic Systems*. Wiley, 1979.
[21] G. Lusztig. Total positivity in reductive groups. In *Lie Theory and Geometry: in Honor of Bertram Kostant*, vol. 123 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser, Boston, 1994 pp. 531–568.
[22] I. Macdonald. *Symmetric Fuctions and Hall Polynomials*. Oxford University Press, Oxford, 1979.
[23] A. Postnikov. Quantum Bruhat graph and Schubert polynomials, June 2002. (Available at arXiv:math.CO/0206077).
[24] H. Sachs. Perfect matchings in hexagonal systems. *Combinatorica*, **4** (1984) pp. 89–99.
[25] B. Sagan. *The Symmetric Group*. Springer, New York, 2001.
[26] M. Skandera. A characterization of $(\mathbf{3}+\mathbf{1})$-free posets. *J. Combin. Theory Ser. A*, **93** (2001) pp. 231–241.
[27] M. Skandera. Interpretaciones del h-vector. *Bol. Asoc. Mat. Venez.*, **2** (2001) pp. 141–174.
[28] M. Skandera. Inequalities in products of minors of totally nonnegative matrices, 2002. Submitted to *J. Alg. Combin.*
[29] M. Skandera. On totally nonnegative polynomials, 2003. (In progress).
[30] M. Skandera and B. Reed. Total nonnegativity and $(\mathbf{3}+\mathbf{1})$-free posets, 2002. Submitted to *J. Combin. Theory Ser. A.*
[31] R. Stanley. *Enumerative Combinatorics*, vol. 1. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[32] R. Stanley. Graph colorings And Related Symmetric functions: Ideas and Applications. *Discrete Math.*, **193** (1998) pp. 267–286.
[33] R. Stanley. *Enumerative Combinatorics*, vol. 2. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
[34] R. Stanley. Positivity problems and conjectures. In *Mathematics: Frontiers and Perspectives* (V. Arnold, M. Atiyah, P. Lax, and B. Mazur, eds.). American Mathematical Society, Providence, RI, 2000 pp. 295–319.
[35] J. Stembridge. Immanants of totally positive matrices are nonnegative. *Bull. London Math. Soc.*, **23** (1991) pp. 422–428.
[36] A. Whitney. A reduction theorem for totally positive matrices. *J. d'Analyse Math.*, **2** (1952) pp. 88–92.

E-mail address: `fardila@mit.edu, rosas@math.uqam.ca, mskan@umich.edu`